グラフ理論解説 （その2）

大阪大学工学部　尾　崎　　弘

3. 木とカット・セット

3・1 木，枝，弦，根

図3・1に示すようなつながったグラフにおいて，できるだけ少ない数の辺をつかってすべての頂点を結ぶことを考える．図3・1の太線の枝の集合は，その一例で，これを**木**（tree）という．すなわち木の定義は，

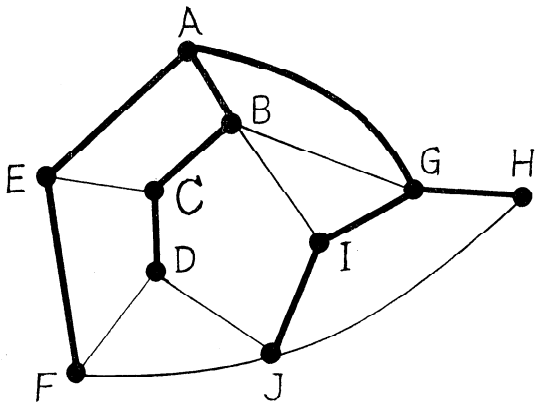


図3・1　木，枝と根

（**木**），つながったグラフにおいて，すべての頂点を結び，しかもループを一つももたないつながった部分グラフを木という．

一つのつながったグラフに対して，普通木はいくつも在在する．たとえば図3・1で，辺 IJ の代りに辺 DJ を用いても木になる．

木に関して次の定理が成立つ．

定理 3・1　有限なグラフが木であるための必要十分条件は，任意の二つの頂点の間に，ちようど1個の道が存在することである．

証明は簡単である．必要であるという証明は次のようになる．定義から少くとも一つの道がなければならず，また二つ以上あればループができるから，ちようど一つに限る．十分であることの証明は略する．

木を構成する辺を枝（branch）といい，木を取除いた残りの辺を**弦**（chord）という．また弦全体の集合を**補木**（co-tree）という．頂点の数を v，辺の数を e，とすると，木を作る枝の数 l は，

$$l=v-1 \qquad (3\cdot1)$$

で，補木を作る弦の数 r は

$$r=e-(v-1)$$
$$=e-v+1 \qquad (3\cdot2)$$

となる．なお，図3・1の太線の木は，頂点 A から出発して木を作ってみたものであるが，このとき A を**根**（root）という．

図3・2のように，つながっていないグラフの場合は，離れているそれぞれの部分グラフについて木を考えることができる．これらの木をまとめて**森**（forest）という．なお，図3・2のグラフは，三つのつながった部分グラフからなっている．この部分グラフを**最大接続部分グラフ**（maximal connected sub-graph）という．

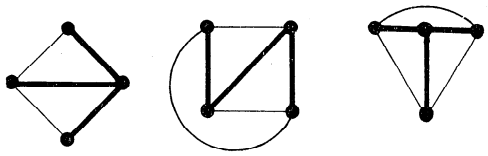


図3・2　森，最大接続部分グラフ

3・2 木に関する例題

（例題8）図3(a)に示す電気回路を考える．この回路の各インピーダンスに流れる電流を計算する場合．普通キルヒホッフの法則をいくつかのループに対して応用して解く．図(b)はこの回路のグラフで，図(b)，(c)(d)には，このグラフの種々のループを示す．各ループに流れる電流を I_1，I_2 等とする．I_1 は図(b)のループに流れる電流である．普通にはループⅠ，Ⅱ，Ⅲをえらんで，

ループⅠより

$$Z_aI_1+Z_c(I_1-I_3)+Z_b(I_1-I_3)=0 \qquad (3\cdot3)$$

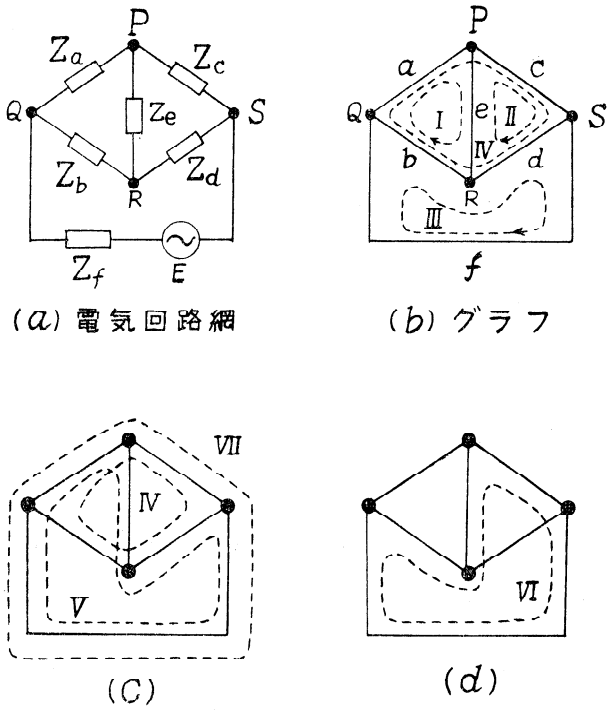
ループⅡより

$$Z_eI_2+Z_d(I_2-I_3)+Z_e(I_2-I_1)=0 \qquad (3\cdot4)$$

ループⅢより

$$Z_b(I_3-I_1)+Z_d(I_3-I_2)+Z_f\ I_3=E \qquad (3\cdot5)$$

なる三つの式を得，これから I_1, I_2, I_3 を求める．ルー



(a) 電気回路網　(b) グラフ

(C)　(d)

図3・3　電気回路網

プIVについては，

$$Z_aI_1+Z_cI_2+Z_d(I_2-I_3)+Z_b(I_1-I_3)=0 \qquad (3\cdot6)$$

となる．いまある人が，この問題を解くのに，ループI，II，IVを選んだとしよう．すなわち式（3・3），（3・4）と（3・6）から，I_1, I_2, I_3 を求めようとしたとする．しかしこの3式からは正しい答が得られるはずがない．この3式には，Zf や電源 E が含まれていないから，実際式（3・6）は式（3・3）と（3・4）を加えることから導かれる．換言すると，この3式は独立な式ではないのである．この場合ループI，II，IIIも独立でない．これは次のようにして理解される．

各ループは次のように表わされる．

ループI：　a+b+e　　（3・7）

ループII：　d+e+c　　（3・8）

ルールIII：　a+b+c+d　　（3・9）

ここで辺の加え算については次のような法則とする．

$$\left.\begin{array}{l} a+a=0, \quad b+b=0 \\ a+a+a=(a+a)+a=0+a=a \end{array}\right\} \qquad (3\cdot10)$$

すなわち，同じ辺の偶数回の加え算は零とする．そうすると，ループIとループIIの式（3・7）と（3・8）を加えると，

$$a+b+e+d+e+c \quad a+b+c+d \qquad (3\cdot11)$$

となってループIIIを得る．これは式（3・3）と（3・4）から式（3・6）を導くことができるのに相当する．なお，この機会に**アーベル群**（abelian group）と**環**（ring）の定義を述べておこう．

（**環**）集合 S に属する任意の二つの元には二種の二項演算，和と積が定義されていて，次の条件を満たす．

（I）　$a \in S$, $b \in S$ なるとき，$a+b=b+a$ で，$(a+b) \in S$.

（II）　任意の $a \in S$ に対し，$0+a=a$ であるような O が S に含まれている．

（III）　$a \in S$ なる任意の元 a に対し，$a+a'=0$ なる元 $a' \in S$ が存在する

（IV）　$a \in S$, $b \in S$, $c \in S$ なるとき，

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

（V）　$a \in S$, $b \in S$ なるとき，

$$ab \in S, \text{（ただし } ab \neq ba)$$

（VI）　$a \in S$, $b \in S$, $c \in S$ なるとき，

$$(ab)c=a(bc)$$

（VII）　$a \in S$, $b \in S$, $c \in S$ なるとき，

$$a(b+c)=ab+ac$$

$$(a+b)c-ac+bc$$

このとき集合 S を**環**という．

また，上の条件中，（I）～（IV）だけが成成立する群を**アーベル群**という．

そうすると，上で述べた辺の集合はアーベル群となる．この場合（III）の a' は a 自身で，$a+a=0$,

3・3　基本閉路系

前節の電気回路の例において，独立なループを選ぶことは簡単である．しかし，もし辺の数が100も200もあるようなグラフであったなら，独立なループを，しかも必要な最少の数だけ選ぶということは簡単でない．この問題は木を利用すると組織的に求めることができる．以下これを示す．

ところで，いくっかのループがあって，これらが互に独立であるとはどういうことであろうか．

定理3・2　いくつかのループがあって，各ループにはそれぞれ，他のループに含まれていない辺が少くとも一つ含まれているとき，これらのループは独立である．

これは明らかであろう．

電気回路の問題にかえろう．いまつながったグラフで表わされる電気回路を考える．頂点と辺の数をそれぞれ v および e とする．各辺を流れる電流を i_1, i_2 …… ie とする．いま電源は電圧源ばかりであるとし，その大きさは既知とする．そうすると未知なのは i_1, i_2……ie の e 個である．キルヒホックの第1法則，□各頂点に流れ込む電流（流れ出るものは負の電流）の総和は零である□を各頂点について考えると，

$$\sum_j i_{aj}=0 \quad ((v-1) \text{ 個独立}) \qquad (3\cdot12)$$

なる式が v 個立てられるが，この中，$(v-1)$ 個は独立である．というのは，$(v-1)$ 個の頂点で上の式が成立すれば，残った一つの頂点では自動的に成立する．これで未知数の数は，

$$r=e-(v-1)=e-v+1 \qquad (3\cdot13)$$

となる．したがって，キルヒホッフの第2法則 □ 任意のループの辺の電圧降下（電源電圧も含めて）の総和は零である □ を適用するのは，r 個の独立なループを選べばよい．したがって，ちようど r 個の独立なループを選ぶ問題に帰着する，なお，この r は式（3・2）の r と全く同じであることに注意を要する．

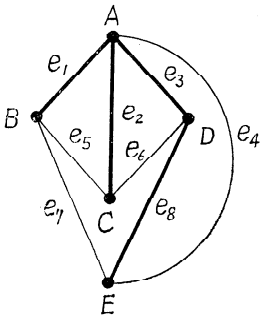


図3・4

図3・4のグラフを例にとって考える．このグラフの一つの木をえらぶ，図では太線の辺の集合である．この木に，補木の一つの辺（すなわち弦）を加えると必らずループが一つできる，たとえば弦 e_5 を加えると

（ループⅠ） $e_1+e_2+e_5$，（e_5：弦） （3・14）

なるループができる，このように弦 e_6，e_7，e_4 を一つづつ加えると，弦と木とによってループが一つずつできる．これらは，

（ループⅡ） $e_2+e_3+e_6$，（e_6：弦） （3・15）

（ループⅢ） $e_1+e_3+e_8+e_7$，（e_7：弦） （3・16）

（ループⅣ） $e_3+e_8+e_4$，（e_4：弦） （3・17）

これらのループは互に独立である．それは，各ループは，他のループに含まれない辺（この場合は弦）を必らず含むから．

一般にグラフから上記のようにしてループを選ぶと，弦の数は r 個であるから，独立な r 個のループを選ぶことができる．従って，このように選んだループについてキルヒホッフの法則を適用すればよい．このように選んだループの集合を，基本閉路系（fundamental systems of circuits）という．木の選び方は一般に一つと限らないから，基本閉路系もまた一組とは限らない．上の式（3・14）～（3・17）で表わされたループⅠ～ループⅣは，図3・4の太線に示した木に伴なう基本閉路系である．

なお，任意のループは必らず，基本閉路系のループによって表わされることは後に示すが，ここでは例だけあげておくと，図3・4において，$e_1+e_4+e_7$ なるループは，ループⅣとループⅢから導かれる．すなわち式（3・16）と（3・17）を加えると，

$$(e_1+e_3+e_8+e_7)+e_3+e_8+e_4$$
$$=e_1+(e_3+e_3)+(e_8+e_8)+e_7+e_4$$
$$=e_1+e_7+e_4$$

つながっていないグラフの場合は，森を選んで，これに弦を一つずつ加えてできるループを考えなければよい．最大接続部分グラフの数を p とすると，基本閉路系のループの数は

$$\mu=e-(v-p)=e-v+p \qquad (3\cdot18)$$

であることは容易に導かれるのであろう．ここで v-p をグラフの**階数**（rank）という．また式（3・18）で表わされる μ を**第1ベッティ数**（first Betti number, nullity）というと，電気回路の場合，グラフの階数は，独立な電圧の数であり，第1ベッティ数は独立な電流の数である．

3・4 カット・セット

図3・5に示すグラフは，A, B, C, D なる4都市間の通信網を示すものとする，いま A から C へ最大何チャネルの通信が可能かを考えてみよう．図には破線で，C_1, C_2 等が示されている．A から C への通信は必らず C_1 なる断面を通過するはずである．すなわち，A から C へのチャネルは，必らず辺 a, b, c のいずれかを通る．この a, b, c を**カット・セット**（cut set）という．グラフからカット・セットを取除くと，グラフは二つの部分に分れる．これがカット・セットという名の由来である．図3・5で，A と C を分かつカット・セットは図に示したように C_1, C_2, C_3, C_4 の4個ある．その他，たとえば辺 a, f, e は頂点 B と他とを分つから，カット・セットである．少し分かりにくいが，a, c, d, f もカット・セットである．

いまは A と C との間の通信を考えているので，A と C を分かつカット・セット C_1 ～ C_4 を考える．各辺の通信容量は図に書いた通りである．C_1 を通るチャネルは合計7，C_2 は9，C_3 は9，C_4 は9である．A からへ C の通信量の最大は明らかに，C_1 ～ C_4 なるカッ

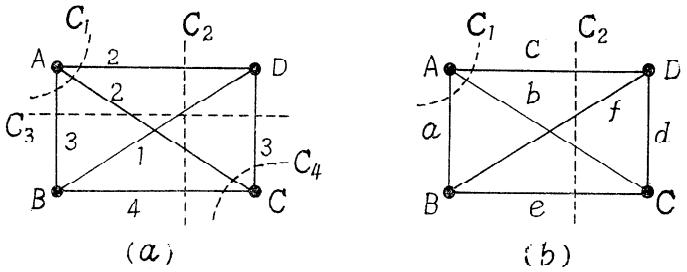


図3・5 通信網とカットセット

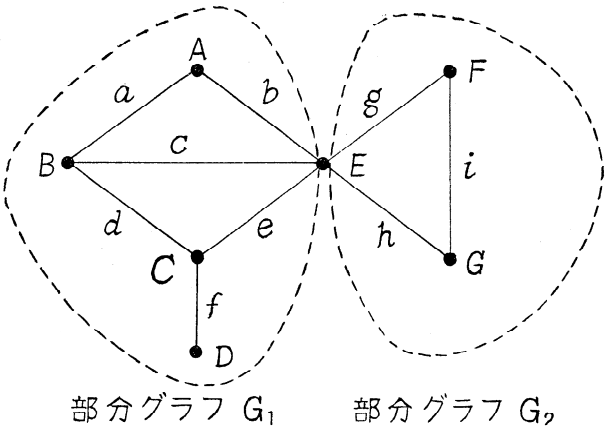


図3・6　カット・バーテツクス

ト・セットの容量の最少値である．上の例の場合はが7で最少であるから，AC 間の最大通信容量は7チャネルである．

ある頂点に入射している辺全部の集合は常にカット・セットのように思える，たとえば，図3・5では点Aに入射する a, b, c とか，点Dに入射する c, f, d はいずれもカット・セットである．しかし図3・6のようなグラフでは，点Eに入射する辺全部，すなわち b, c, e, g, h はカット・セットといわない，g と h だけでカット・セットであり，h と c と e だけでもカット・セットである．図3・6の点Eのように，2個の真部分グラフG_1とG_2の唯一の共通な頂点であるような頂点を，**カット・バーテックス** (cut vertex) という．点Cもカット・バーテックスである．カット・バーテックスでない頂点に関しては，その点に入射するすべての辺の集合はカット・セットである．

3・5　木とカット・セット

木とカット・セットに関して次の定理がある．

定理3・3　任意の木をTとするとき，すべてのカット・セットは木Tの枝を少くとも1個含んでいる．

証明は明らかで，木は頂点のすべてをつないでおり，カット・セットはグラフを2個の部分グラフに分けるのであるから，必らず木と辺を共有する．

一つの木について，その枝の一つだけを含んでいるカセット・セットの集合を**基本カット・セット系** (fundamental system of cut-sets) という．木から基本カット・セット系を求めることを，例題によって示そう．図3・7(a)のグラフにおいて，太線で示した木をTとL，その枝を t_1, t_2 等とし，弦を C_1, C_2 等とする．図(b)は木だけを取出したものである．図(b)の木を一つのグラフと考えると，各枝はカット・セットであり，t_1〜t_5 はこのグラフの木Tの基本カット・セット系である，図(b)

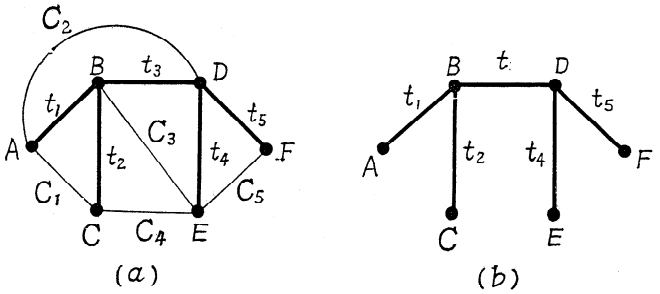


図3・7　基本カット・セット系の求め方の説明図

で t_1 を取去ると頂点Aは他から切りはなされる．これに対して図(a)では C_1, C_2 と t_1 が頂点Aとその他を分かつカット・セットで，ちようど枝は t_1 だけを含んでいる．同様にたとえば t_3 は図(b)のグラフ BC なる部分グラフと，DEF なる部分グラフに分かつ，これに対応して図(a)で，ABCを含む部分グラフと，DEFを含む部分グラフに分かつカット・セットは．C_2 t_3 C_3 C_4 よりなるカット・セットで，これはやはり枝 t_3 をただ一つ含んでいる．以下同様に，各枝に対応するカット・セットを求めることができる．

3・6　カット・セットとループ

ループとカット・セットに関しては次の定理がある．

定理3・4　カット・セットはループと偶数個の辺を共有する．

図によって考えると明らかである．図3・8において，辺 C_1〜C_5 をカット・セットとしCとする．Cの分かつ部分グラフを G_1，および G_2 とする．いまループLが G_1 または G_2 の中にあれば，カット・セツトCと0個の辺を共有する．もしLが G_1 と G_2 にまたがるならば，どうしても偶数個の辺を共有せざるを得ない．

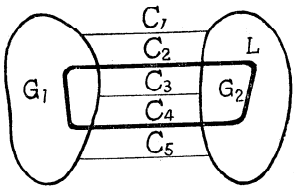


図3，8　ループとカット・セット

4.　バイパータイト・グラフ (bipartite graph)

4・1　割当て問題（結婚問題）

図4・1に示すように，A, B, C……なる頂点のグループ G_1 と，a, b, c…… なるグループ G_2 とがあって，一つのグループに属する頂点間には辺がなく，異ったグループに属する頂点間にだけ辺があるようなグラフを，**バイパータイト・グラフ** (bipartite graph) という．このようなグラフになる例題を示そう．

ある小さな島で酋長が島の青年達を結婚させることになった．A, B, C 等は適齢期の男性達，a, b, c 等は同じく女性達であるとし，A はa かc かe のいずれかと結婚したいが，その他の女性はいやだと云ったとする，B はa かb と結婚したいという．C, D 等もそれぞれ好みの女性があるとする．A, B, C 等の男性それぞれ結婚してもよいという女性との間を辺で結ぶと図4・1ができあがる．いま，男性の数と女性の数が同数であるとするとき，酋長はこのグラフから誰に誰を割り当てればよいかを考えねばならない．問題は，このグラフにどのような条件が満たされているとき，この結婚問題を解くことができるか，ということである．

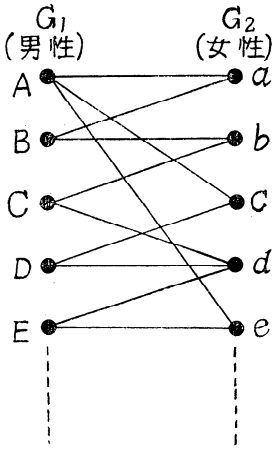


図4・1　結婚問題のグラフ

別の例とし．大学で時間割を作成する問題を考える，そのまた例として電子工学科の場合をとろう．電子工子学科の場合，工学部全部の共通講義とか，いくつかの学科の共通講義の時限は先に決定されてくる．また，学生実験の日と時間も先に決ってくる．そうして空いている時限に電子工学科だけの講義を当てはめるのである．一方，教官の方は，人によって都合の悪い日や時間があるので，どの時限でもよいというわけにはいかない．図4・2で t_1, t_2, t_3 等は空いている時限を表わすとする．t_1 は月曜の3—4時限を，t_2 は月曜の5—6時限を表わす．一方 P_1, P_2, P_3 等は教官で，教官 P_1 は t_2 か t_4 の時間が都合がよく，P_2 は t_1 か t_2 か t_3 の時限がよいとする．以下同様．この場合教官の数よりも空いている時限の数の方が多いことがありうる．最後に空いた時限は学生の研究時間とするとしよう．

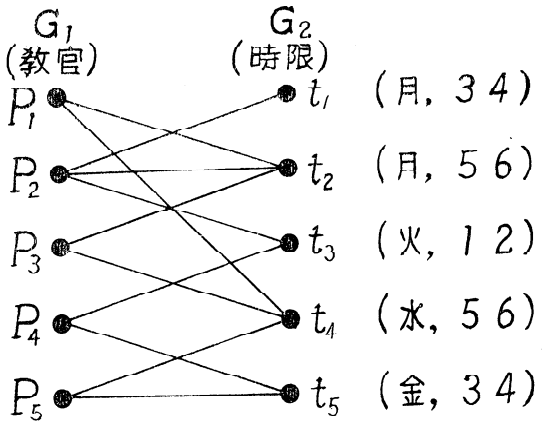


図4・2　時間割作成問題のバイパータイト・グラフ

さて，教官と，その人の都合のよい時限とを辺で結ぶと図4・2のようなバイパータイト・グラフとなる．問題は P_1, P_2, P_3 等と t_1, t_2, t_3 等をどういうぐあいに対応させればよいかということである．図の場合の一つの解は，

$$\left.\begin{array}{l}(P_1,\ t_4);\quad (P_2,\ t_1);\quad (P_3,\ t_2)\\ (P_4,\ t_3):\quad (P_5,\ t_5)\end{array}\right\}\qquad (4\cdot 1)$$

である．

一般に式（4・1）のような解が，いくつもある場合もあるし，全くない場合もあることは明白であろう．図4・3 (a) のグラフは明らかに解がないし，図 (b) のグラフではいくつもの解がある．

このような問題を**割当問題**とか，**婚結問題**という．

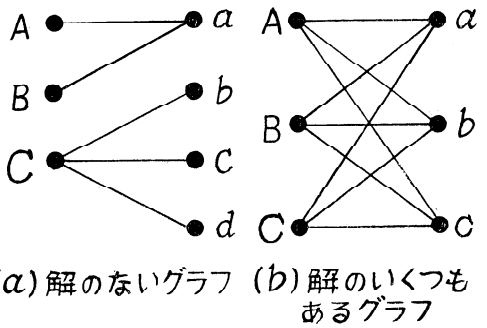


図4・3　バイパータイト・グラフ

4・2　バイパータイト・グラフに関する一定理，

前節に述べたような問題の解に関する定理として次のようなものがある．時間割の問題について述べる．

定理4・1　時間割が完成できるための必要十分条件は次の通りである．教官の数をM，空いている時限の数を N ($N \geqq M$) とすると，任意の k 人 ($k=1$, 2, 3, ……, M) の教官から少くとも k 個 の異った時限に辺が入射していること．

たとえば図4・3 (a) では，$k=1$ とすると，各教官から少くとも1本の辺が時限に入射しているから条件が満たされている．しかし $k=2$ とすると満たされない，たとえば A と B なる2人を考えると，2個の異った時限に辺が入射していない．したがって不可能である．

上の定理の条件が必要条件であることは明らである．十分条件であることは数学的帰納法によって証明される．まず，教官がただ1人の場合，定理の条件が満たされていれば解があることは明白，2人の場合も考えておこう．図4・4 (a) や (b) の P_1 のように，ただ一つの辺しか

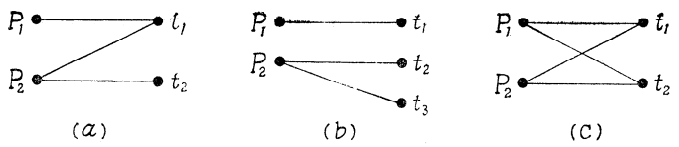


図4・4　割当て問題の解の参考図

入射していない教官(これを特異教官となずけておこう)があれば，その人にはその時限を割当てる．

そうするともう一人の教官からは t_1 とは異った1個以上の時限に辺で結ばれているはずであるから t_1 以外を割当てればよい．特異教官がないときは，P_1にどれか1個の時限を割当てればよい．次に $(M-1)$ 入の教官に対して時限が $N \geq (M-1)$ 個あって上の定理の条件が満たされたときは，割当てが可能であると仮定する．このときM人の教官に対して $N \geq M$ のときも割当てが可能なことを示そう．いまM人の中で特異教官が1人でもいたとすると，その1人にその時限を割当てる．そうすると残った $(M-1)$ 人の教官に対する残った時限の関係は定理の条件を満たし，前記の仮定から割当てが可能である．したがってN人に対して割当てが可能である．もし特異教官がいなければ，だれか1人にその人の都合のよい時限を割当てれば，以下は同様である．

この証明はまた，解の求め方をも示している．すなわち，こんな問題が与えられると，まず特異教官には所望の時限を与える．残ったグラフについてまた特異なものができれば，それぞれ所望のものを与える．特異なものがなくなれば，だれか1人にどれかを割当てる．残ったものに特異なものができればまた所望のものを割当てる．以下これをくり返せばよく，こうして割当てのできなかった場合は，定理の条件をみたしていないはずで，どうしても解のない場合である．

ここに述べた問題は，時間割の問題の最も簡単なものであって，教師の都合だけしか考えていないものである．一般には，講義室の都合，学科課程の都合，学生の都合等を考えると，さらに複雑な問題となる．

4・3　代表選出問題

いま一つの小さな学校があって，その生徒達で組織する種々のクラブがあったとする．たとえばテニス部，野球部，生物クラブ，音楽部等々，その最高学年の生徒だけについて考える．生徒はどのクラブにも入れるし，二つ以上に入ってもよい．ところで各部の代表者，あるいはキャプテンを1人ずつ選出しなければならないとし，各生徒は1人で2個以上の部の代表者を兼ねることは許されないとする．このとき，どのような条件が満たされているとき，代表者が選出できるであろうか．この問題を**代表選出問題**と呼んでおこう．

図4・5で，C_1，C_2，C_3 等はクラブで，P_1，P_2，P_3 等は生徒とする．クラブCと，それに属する生徒Pとを辺で結ぶと図のようなバイパータイト・ラフになることは明らかである．図4・6に示すような場合は，C_1，C_2 C_3 に対して代表3名を選出することはできない．

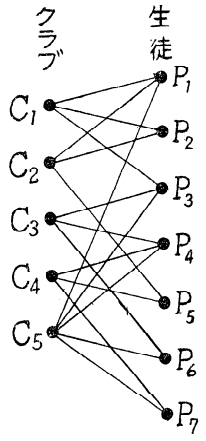


図4・5　代表選出問題のバイパータイト・グラフ

この問題に対しては次のような定理がある．

定理4・2　もし各クラブには少くとも t 人が属し，かつ，各人は多くとも t 個のクラブにしか加入できないものとするとき，代表選出は常に可能である．

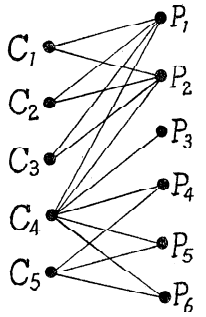


図4・6　代表選出問題（解のない場合の例）

この問題は前節の時間割問題に帰着せしめることができる．すなわち，各クラブとその構成員をそれぞれ前節の問題の教官ならびに空いている時限に対応させればよい．こう考えると，定理4・2の証明は，その条件が定理4・1の条件に当てはまることを示せばよい．そのっもりで証明を考えよう．いまクラブの数を M とし，任意の k $(k=1, 2, \cdots\cdots, M)$ 個のクラブを考えるに，これからPへは少くとも kt 個の辺が入射しているはずである．各Pは多くとも t 本の辺しか入射していないから，kt 個の辺は k 個以上の異ったPに入射していなければならない．したがって k 個のCからは k 個以上の異ったPに辺が入射していなければならない．したがって定理4・1の条件をみたし，代表の選出は常に可能である．

4・4　OR の問題への応用

バイパータイト・グラフは，OR の問題にも応用されている．ここにはその一例だけを示そう．図4・7において，P_1，P_2，P_3 等はある品物の生産者であるとし，D_1，D_2，D_3 等はその需要者であるとする．Pi から Di への辺は供給ルートを表わし，各辺には Cij および cij なる量が伴なっている．Cij は重複題で，これはそのルートの**容量**（capacity）に当り，cij は重みでそのルート

の**費用**（cost）である．このとき最も合理的に品物を生産し，供給するにはどうすべきかというのがこの問題である．紙面の都合上詳細は略すが，別に文献を示すつもりである．

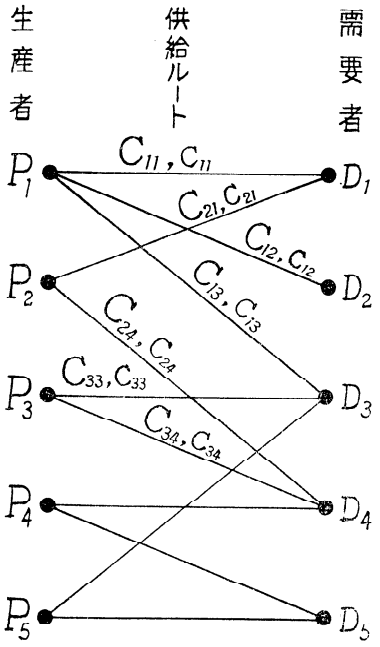


図4・7　OR の一問題のグラフ