3. 論　理　数　学

3.1 集　合

3.1.1 集合と集合に関する二三の定義

確定された対称物の集まりを**集合**（set）という．集合に属する対象物を元または**要素**（element）という．集合が明確に定義されるためには，その定義によって任意の対象物が集合に属するか否かということと，二つの対象物が同等のものであるか否かが判定できなければならない．

集合の定義の仕方には次のような2通りの方法がある．

（1）内包的定義

集合に属する元の性質をあげることによって定義する方法で，たとえば〝この学級のめがねをかけた人〟という集合では，この学級に属することと，めがねをかけているという性質によって，集合に属するか否かが判定できる．その他〝$0 \leq x \leq 1$ なる実数〟とか，〝四辺形〟なども同じ定義の仕方である．

集合を書き表わすのに，〝四辺形〟とか〝$0 \leq x \leq 1$ なる実数〟のように内包的に定義した場合は

$$S_1 = \{x \mid \text{四辺形}\},\quad S_2 = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\} \tag{3.1}$$

と表わす．一般的にいうと，集合を定義する性質を $C(x)$ とすると

$$S = \{x \mid C(x)\} \tag{3.2}$$

と表わす．

(2) 外延的定義

集合に属する元をすべて列挙する方法である．たとえば〝大阪，神戸，京都，東京〟の4都市というような定義の仕方である．これら4都市を記号で 0, k, n, t と表わすと，外延的な定義をした場合の集合の表わし方は次のようである．

$$S=\{0,\ k,\ n,\ t\} \tag{3.3}$$

集合 A の元を a とするとき，a は A に属するとか，A は a を含むという．a が A に属し，b が A に属さないとき，それぞれ次のように書き表わす．

$$\left.\begin{array}{lll} a\in A & \text{または} & A\ni a \\ b\notin A & \text{または} & A\not\ni b \end{array}\right\} \tag{3.4}$$

以下，集合についての二三の定義を列挙しよう．

(a) 部分集合 (subset)，**真部分集合** (proper subset)

集合 A と B において，B の元のすべてが A に含まれるとき，B は A の部分集合であるといい，また A は B を含むともいって，次のように書き表わす．

$$B\subseteq A \quad \text{または} \quad A\supseteq B \tag{3.5}$$

部分集合の定義から，A 自身も A の部合集合であることは明らかである．$A\supseteq B$ で，かつ $B\supseteq A$ のとき

$$A=B \tag{3.6}$$

と書き表わし，等しい集合という．A と B が等しい集合でないとき

$$A\neq B \tag{3.7}$$

と書く．また $A\supsetneqq B$ で $A\neq B$ のとき

$$A\supset B \tag{3.8}$$

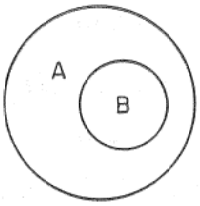


図 3.1 真部分集合（フェン図表）

と書き表わし，B は A の真部分集合であるという．これを図示したものが図 3.1 である．このような図を**フェン図表** (Venn diagram) という．なお，理論を統一的に述べる必要から，元を1つも含まない集合を考え，これを**空集合** (empty set) といい，ϕ で表わす．ϕ はすべての集合の部分集合である．

(b) 差集合 (difference set)，**補集合** (complement set)

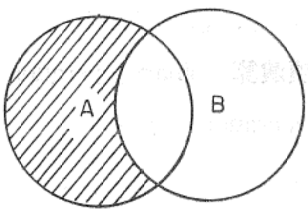


図 3.2 差集合（A－B）

集合 A, B において，A の元であるが B の元でない元の集合を差集合といい，$A-B$ で表わす．すなわち

$$A-B=\{x\mid x\in A,\ x\notin B\} \tag{3.9}$$

差集合を図示したものが図 3.2 である．

ある集合 S があって，その部合集合を $S_1, S_2, S_3, \cdots$ とすると，$S-S_i\subseteq S$ で S の部合集合である．このとき

$$S-S_i=\widetilde{S_i} \tag{3.10}$$

と表わし，$\widetilde{S_i}$ を S に対する S_i の補集合という（図 3.3 参照）．明らかに $\widetilde{S_i}$ の補集合は S_i である．

すなわち

$$\tilde{\tilde{S_i}}=S_i \qquad (3.11)$$

【例3.1】 集合Sを

$$S=\{0,\ k,\ n,\ t\} \qquad (3.12)$$

とすると

$$S_1=\{0,k\},\ S_2=\{t,n\},\ S_3=\{0,k,t\} \qquad (3.13)$$

などはいずれも真部分集合で

$$\tilde{S_1}=S_2,\ \tilde{S_3}=\{n\} \qquad (3.14)$$

である．またSの部分集合の数は$2^4=16$個である．これを考えるには表3.1のようにすればよい．すなわち，4つの元の下に4けたの2進数を列挙し，各数と部分集合を1対1に対応させるのである．2進数で1となっているけたの上の元からなる部分集合を，その2進数に対応させる（たとえば0000はϕに，1100は$\{0,k\}$にというぐあいに）．4けたの2進数は0から15まで16個あるから，部分集合の数は16個である．一般にn個の元からなる集合の部分集合は2^n個ある．

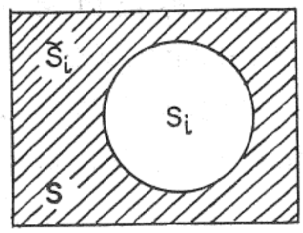


図 3.3 補集合 ($\tilde{S_i}=S-S_i$)

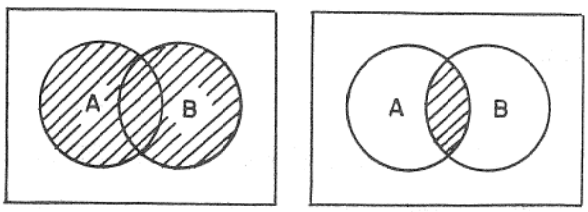
表 3.1 集合 $\{0,k,n,t\}$ の部分集合

	0	k	n	t	部分集合
0	0	0	0	0	ϕ
1	0	0	0	1	$\{t\}$
2	0	0	1	0	$\{n\}$
3	0	0	1	1	$\{n,\ t\}$
4	0	1	0	0	$\{k\}$
6	0	1	0	1	$\{k,\ t\}$
5	0	1	1	0	$\{k,\ n\}$
⋮	⋮				⋮
15	1	1	1	1	$\{0,k,n,t\}$

（c） **和集合**（sum, union），**積集合**（product, join）

集合AとBの少なくとも一方に属する元からなる集合をAとBの結び（union）または和集合といい，$A\cup B$と表わす．すなわち

$$A\cup B=\{x|x\in A \quad \text{または} \quad x\in B\} \qquad (3.15)$$



(a) 和集合 A∪B　(b) 積集合 A∩B

図 3.4 和 集 合 と 積 集 合

これを図示したものが図3.4（a）である．定義から

$$A\cup B=B\cup A \qquad (3.16)$$

また，AとBの両者に共通に含まれる元からなる集合を**交わり**（join）または積集合といい，$A\cap B$で表わす．すなわち

$$A\cap B=\{x|x\in A,\ x\in B\} \qquad (3.17)$$

これを図示したものが図3.4（b）である．定義から明らかに

$$A\cap B=B\cap A \qquad (3.18)$$

（d） **演算**（poeration）

集合Sの部分集合を$S_1, S_2,\cdots$とするとき，$S-S_j$や$S_i\cup S_j$を求めることを，演算をほどこすという．S_i-S_jや$S_i\cup S_j$は2つの項S_iとS_jについての演算であるので，**2項演算**（binary operation）といい，$\tilde{S_j}$は1項演算という．一般にn項に関する演算を**n項演算**（n-ary operation）という．

（e） **普遍集合**（universal set）

演算は1つの集合に属する元や部分集合に関して行ない，新しく得られたものは元の集合に属しなければ意味がない．それゆえ，演算をほどこされる元や部分集合ならびに得られたものを含む集合を母体としなければならない．このように母体となる集合を**普遍集合**といい，以下これをIで表わそう．以下断わらずに$\tilde{S}$と書くと，これはIに関する補集合を指すものとする．なお，幾何学的表現を用いる場

合は，普遍集合を**空間**（space）とか**抽象空間**（abstruct space）といい，Iの元を点，部分集合を**点集合**（point set）という．

【例 3.2】 いま美しい女性の集合をP，教養のある女性の集合をQとすると，$P\cap Q$ は美しくて教養のある女性の集合であり，$P\cup Q$ は美しいかまたは教養のある女性の集合である．このような話をしているとき，母体となる女性の集合を考えているはずである．たとえばある村の女性とか，日本女性全体とか，それが普遍集合である．

（f） 対（pair）

次にaとbの対（pair）を(a,b)で表わす．一般に

$$(a,b)\neq(b,a) \tag{3.19}$$

である．この意味で(a,b)を**順序対**（ordered pair）という．これに対し集合$\{a,b\}$では

$$\{a,b\}=\{b,a\} \tag{3.20}$$

であるから，**非順序対**（unordered pair）である．順序対で

$$(a,b)=(c,d) \tag{3.21}$$

は

$$a=c,\ b=d \tag{3.22}$$

のことである．

対は2個の対象物に関するものであったが，n個の対象物に対する同様のもの，すなわち（p_1, p_2,⋯ p_n）を**n組**（n-tuple）という．前と同様に

$$(p_1,p_2,\cdots,p_n)=(p_1',p_2',\cdots,p_n') \tag{3.33}$$

は

$$p_1=p_1',\ p_2=p_2',\cdots,p_n=p_n' \tag{3.34}$$

と同等である．

（g） 直積集合（direct product）

$a\in A,\ b\in B$ のとき，(a,b) の全体からなる集合を $A\times B$ で表わし，これを**直積集合**（direct product）という．すなわち

$$A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A,\ y\in B\} \tag{3.35}$$

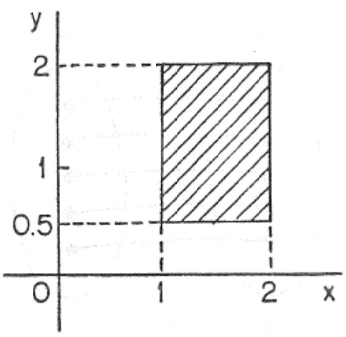


図 3.5 直積集合 $X\times Y$
$X=\{x\mid 1\leq x\leq 2\}$
$Y=\{y10.5\leq y\leq 2\}$

たとえば

$$\left.\begin{array}{l}A=\{x\,|\,1\leq x\leq 2\}\\ B=\{y\,|\,0.5\leq y\leq 2\}\end{array}\right\} \tag{3.36}$$

とすると，$A\times B$ は図3.5の斜線部の点集合である．

同様に $A\times B\times\cdots\times Z$ なる直積集合は

$$A\times B\times C\times\cdots\times Z=\{(a,b,c,\cdots,z)\,|\,a\in A,\ b\in B,\ c\in C,\cdots,z\in Z\} \tag{3.37}$$

である．また

$$A\times B=\phi \quad は \quad A=\phi \quad または \quad B=\phi \tag{3.38}$$

と同等であり

$$(A\times B)\subseteq(C\times D) \quad は \quad A\subseteq C,\ B\subseteq D \tag{3.39}$$

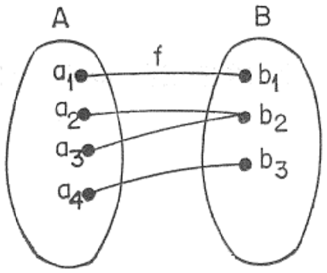
と同等である．

(h)　対応（correspondence）

集合 A, B において，Aの元aに対しBの元bを対応させる規則が決まっているとき，AからBへの**写像**（mapping）または**対応**（correspondence）が決まっているという．図3.6，図3.7には，Aの元と，これに対応するBの元を線で結んで図示した．写像を書き表わすのに

$$f: A\rightarrow B \qquad または \qquad A\xrightarrow{f}B \tag{3.40}$$

のように表わす．fは対応の規則である．fを**関数**（function）ともいう．fによってAの元aがBの元bに写像されるとき



定義域　　値域

図 3.6　写像 $A\xrightarrow{f}B$
（1価関数，一意対応）

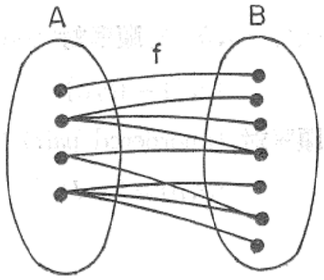


図 3.7　対応 $A\xrightarrow{f}B$
（多価関数）

$$b=f(a) \tag{3.41}$$

と書き，b を f による a の**像**（image）という．$A\xrightarrow{f}B$ において，A を**定義域**（domain），B を**値域**（range）と呼ぶ．$A\xrightarrow{f}B$ において，A の元 a に対し B の元 b が1個対応する場合，これを**一意対応**（univalent correspondence）という．普通に写像というと一意対応を指す．本書でも以下写像をこの意味に用いる．図3.6は一意対応を示す．関数という言葉を用いる場合は**1価関数**（one-valued function）という．これに対し図3.7のように，A の元1個に対し B の元2個以上対応するとき，f を**多価関数**（many-valued function）という．

関数 f と g が等しいということ（$f=g$）は，両者の定義域が等しく，すべての $a\in A$ に対し

$$f(a)=g(a) \tag{3.42}$$

であることである．

f を $A\xrightarrow{f}B$ とし　　$f(a)=b$　　(3.43)

であるとき

$a\in f^{-1}(b)$　〔1：1対応なら $a=f^{-1}(b)$〕　(3.44)

と表わし，f^{-1} は f の **逆対応**（inverse correspondence）であるという．f と f^{-1} がともに一意対応であるとき，f を**1対1対応**（one-to-one correspondence）または**単射**（injection）という．これを図で示したものが図3.8である．

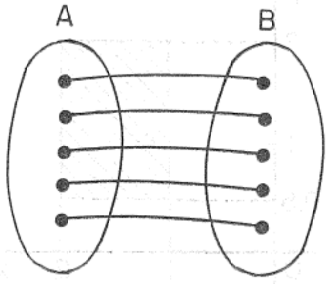


図 3.8　1対1対応

対応という見地から先に定義した演算を見なおすと，たとえば2項演算 $x+y=z$ は，対 (x,y) を z に対応させることであり，また直積空間 $Z=X\times Y$ は，対 (x,y) を zに対応させることである．ただし X, Y, Z はそれぞれ x, y, z の属する集合である．

3.2 恒等式

集合Iの部分集合を A,B,C とするとき，次の諸式が成り立つ．

$$\text{（べき等律）}\begin{cases} A\cup A=A & (3.45.\ \mathrm{a}) \\ A\cap A=A & (3.45.\ \mathrm{b}) \end{cases}$$

$$\text{（交換律）}\begin{cases} A\cup B=B\cup A & (3.46.\ \mathrm{a}) \\ A\cap B=B\cap A & (3.46.\ \mathrm{b}) \end{cases}$$

$$\text{（結合律）}\begin{cases} (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C) & (3.47.\ \mathrm{a}) \\ (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C) & (3.47.\ \mathrm{b}) \end{cases}$$

$$\text{（分配律）}\begin{cases} A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) & (3.48.\ \mathrm{a}) \\ A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) & (3.48.\ \mathrm{b}) \end{cases}$$

$$\text{（吸収律）}\begin{cases} A\cup(A\cap B)=A & (3.49.\ \mathrm{a}) \\ A\cap(A\cup B)=A & (3.49.\ \mathrm{b}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I\cup A=I & (3.50.\ \mathrm{a}) \\ \phi\cap A=\phi & (3.50.\ \mathrm{b}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi\cup A=A & (3.51.\ \mathrm{a}) \\ I\cap A=A & (3.51.\ \mathrm{b}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\cup\widetilde{A}=I & (3.52.\ \mathrm{a}) \\ A\cap\widetilde{A}=\phi & (3.52.\ \mathrm{b}) \end{cases}$$

これらの諸式が成立することは，和集合・積集合および補集合などの定義から確かめられる．さらにフェン図表を参照すれば容易である．一例として分配律の１つ

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \tag{3.53}$$

をフェン図表から証明しよう．

図3.9において，上の式の左辺が図（a）の斜線部のようになることが容易に知られる．右辺については，$A\cup B$ は図（b）の斜線部，$A\cup C$ が図（c）の斜線部となり，これらの共通部分が $(A\cup B)\cap(A\cup C)$ で，図（a）の斜線部と同じになることは容易に知られる．

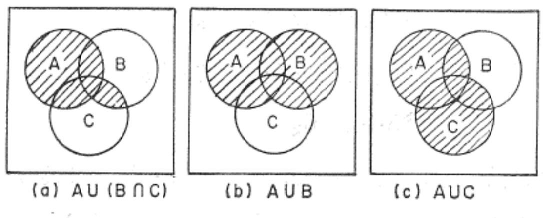


図 3.9 フェン図表による式（3.53）の証明

なお，式（3.18. a）から（3.25. b）に至るまでは基本的な恒等式であるが，これらは２つずつ対になっている．そうして対になっている式で，表3.2のように ∪ と ∩, I と ϕ を入れ換えると，一方から他方の式に到達する．このことは，上の基本式を基礎として立てられた定理とか公式とかがあると，その中で ∪ と ∩, I と ϕ を入れ換えて得られるものは，また正しい定理や公式となることになる．この性質を**双対性**（duality）という．形式的に書くと ∪ と ∩ ならびに補集合を含む等式

表 3.2 双対

$\cup \leftrightarrow \cap$
$I \leftrightarrow \phi$

$$F(p_1,p_2,p_3,\cdots,p_n,I,\phi,\cup,\cap)=G(p_1,p_2,p_3,\cdots,p_n,I,\phi,\cup,\cap) \tag{3.54}$$

が成立しているならば，前記のように $\cup$ と $\cap$, I と ϕ を入れ換えた次式も成立する．すなわち

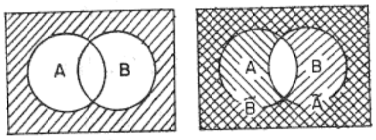
$$F(p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n, \phi, I, \cap, \cup)=G(p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n, \phi, I, \cap, \cup) \tag{3.55}$$

なお，**ド・モルガン**（de Morgan）の定理として知られている次の２式は有名でかつ有用である．

$$\widetilde{A\cup B}=\widetilde{A}\cap\widetilde{B} \tag{3.56. a}$$

$$\widetilde{A\cap B}=\widetilde{A}\cup\widetilde{B} \tag{3.56. b}$$

両式は双対であるから，上の式だけをフェン図表によって証明しよう． 図 3.10 において， $A\cup B$ は図（a）の斜線部となることは明らかである．図（b）の左下りの斜線は $\widetilde{A}$ を，右下りの斜線部は $\widetilde{B}$ を示す． これらの共通部分である格子の部分が $\widetilde{A}\cap\widetilde{B}$ で，これが図（a）の斜線部と同じであることが知られよう．



(a) $\widetilde{A\cup B}$　(b) $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{A}\cap\widetilde{B}$

図 3.10　ド・モルガンの定理

3.3 命 題 論 理

3.3.1 命題とその記号表示

いま，果物がいくつかあって，それを話題にしているとしよう．果物の中には大きいものもあれば，大きくないものもあり，赤いものもあれば赤くないものもあるとする．そうして

〝この果物は大きい〟

〝この果物は赤い〟

などと話しているとしよう．以下では，いわゆる**2値論理**（two-valued logic）を考える．これは， 1つの果物に関しては，それが〝大きい〟か〝大きくない〟かのいずれかであるとし，大きくも小さくもない中間のものは考えないとするのである．換言すると，１つの果物を取り上げると，それが〝大きい〟ということが**真**（ture）であるか，さもなければ**偽**（false）であるかのいずれかとする．

このように，ある内容をもった文章について，それが真であるか偽であるかのいずれかであるものを**命題**（statement）という．他の例をあげると

〝4 は偶数である〟

〝地球は自転している〟

〝5−2＝6〟

などはいずれも命題で，はじめの２つは真なる命題で，最後のものは偽なる命題である．

果物の話にもどろう．〝この果物は大きい〟とか，〝果物は赤い〟などを次のように記号で表わす．

p：この果物は大きい

q：この果物は赤い

これに対し

$\bar{p}$：この果物は大きくない

$\bar{q}$：この果物は赤くない

などと表わし，$\bar{p}$ や $\bar{q}$ をそれぞれ p や q の**否定**（negation）という．なお，果物が大きかったり，大きくなかったり，赤かったりするのを**論理的可能性**（logical possibility）という．いまの場合， p と q

なる命題によって果物の論理的可能性の組合せを考えると，表3.3のようになる.

表 3.3 論 理 的 可 能 性

(a)	大きくてかつ赤い	p でかつ q	$p\cdot q$
(b)	大きくてかつ赤くない	p でかつ $\bar{q}$	$p\cdot\bar{q}$
(c)	大きくなくてかつ赤い	$\bar{p}$ でかつ q	$\bar{p}\cdot q$
(d)	大きくなくてかつ赤くない	$\bar{p}$ でかつ $\bar{q}$	$\bar{p}\cdot\bar{q}$

次に〝この果物は大きくてかつ赤い〟を

$$（論理積）\ p\cdot q \quad（または\ p\wedge q） \tag{3.57}$$

と表わし，これを**論理積** (logical product または conjunction または conjunctive) という. $p\cdot q$ は p でかつ q (p and q) と読む. 同様に $p\cdot\bar{q}$ は〝この果物は大きくてかつ赤くない〟を表わす. $p\cdot q$ が真となるのは，p と q がともに真の場合だけである.

p や q が命題なら，$p\cdot q$ や $p\cdot\bar{q}$ も命題で，これらを**複合命題** (compound statement) という. また p や q から $\bar{p}$ や $p\cdot q$ を作ることを**論理演算** (logical operation) または論理操作をほどこすという.

次に，いま甲という人が，〝大きいかまたは赤い果物〟がほしいといったとしよう. 〝果物が大きいかまたは赤い〟を表わすのに

$$（〔包含的〕論理和）：p\vee q \quad（または\ p+q） \tag{3.58}$$

と表わし，これを**論理和** (logical sum または disjunction または disjunctive) という. $p\vee q$ は p または q (p *or* q) と読む. $p\vee q$ は表3.3の (a)，(b)，(c) の場合真である.

次に乙という子供が甲に，〝大きいかまたは赤い果物〟をさしあげるといったとしよう. この場合，乙のいった意味は次のようであるかもしれない. すなわち，表3.3の (b) か (c) の果物ならあげるが，(a) のように大きくてかつ赤いのはいやであると. このような場合を**排他的論理和** (exclusive disjunction または exclusive or) といい

$$（排他的論理和）：\ p\oplus q \quad（または\ p\veebar q） \tag{3.59}$$

と書き表わす. これはまた $\oplus$ なる記号から ring sum ともよばれる. $p\oplus q$ に対し $p\vee q$ を**包含的論理和** (inclusive disjunction または inclusive or) という. たたし単に論理和というと $p\vee q$ のほうをさす. 両者をはっきり区別するときの読み方は次のとおりである.

$p\vee q$ ： p または q または両方 (p or q or both)

$p\oplus q$ ： p または q しかし両方でない (p or q but not both)

3.3.2 真理値と真理値表

前項の例について考えていこう. 果物が大きかった場合，p は真であるという. このとき $\bar{p}$ は偽であるという. p が真なら $\bar{p}$ は偽，p が偽なら $\bar{p}$ は真である. これを表3.4のように表わし，**真理値表** (truth table) という. 表 (a) で T は真を，F は偽を表わす. T と F の代わりに表 (b) のように1と0で表わすことが多い. 以下は簡単のため主として1と0を用いる. p が真であるとき，p の**真理値** (truth value) が1であるという. この場合

表 3.4 真理値表

(a)

p	$\bar{p}$
T	F
F	T

(b)

p	$\bar{p}$
1	0
0	1

$$Tv(p)=1\ （Tv\ は\ truth\ value\ の略） \tag{3.60}$$

とでも書き表わすべきであるが，簡単のため

$$p=1 \tag{3.61}$$

と表わそう，p が偽であれば $Tv(p)=0$ の代わりに $p=0$ と表わす. さらに $p=1$ のときは略して単に p と書くこがとある. たとえばこの果物は p であるというと，これは $p=1$ であるということで，

この果物は大きいということである．

表 3.5　真理値表の例

p	q	$p\cdot q$	$p\vee q$ $(p+q)$	$p\oplus q$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	0

p や q から $p\vee q$ や $p\cdot\bar{q}$ が作られるから，p や q を変数，$p\vee q$ や $p\cdot q$ を関数と考えて真理値表を作成したものが表３．５である．表の縦に２本線を引いてある左側は変数を，右側は関数を表わしている．この表から，論理和を $p+q$ と表わしてみると，１と０と＋と・の間には次のような関係が成立することが知られる．

$$\left.\begin{array}{ll} 1+1=1, & 1\cdot 1=1 \\ 1+0=1, & 1\cdot 0=0 \\ 0+1=1, & 0\cdot 1=0 \\ 0+0=0, & 0\cdot 0=0 \\ \overline{1}=0, & \overline{0}=1 \end{array}\right\} \tag{3.62}$$

この式をみると，$1+1=1$ という点を除くと普通の代数の和や積と同様である．また排他的論理和については次のようになる．

$$\left.\begin{array}{l} 0\oplus 0=0 \\ 1\oplus 0=0\oplus 1=1 \\ 1\oplus 1=0 \end{array}\right\} \tag{3.63}$$

このように真理値を０と１で表わしてみると，排他的論理和は，２を法とする**加え算**〔または**モード**（略して mod）２の加算〕と一致することが知られる．

【補１】　n を法とする加算　　たとえば

$$1+1=0 \quad (\mathrm{mod}\ 2) \tag{3.64}$$

$$8=3 \quad (\mathrm{mod}\ 5) \tag{3.65}$$

などと書くときの mod n は**モード** n または**モデュロ**（modulo）n と読み，n で割った余りに関するものと理解すればよい．

実際的な例をあげると，普通のアナログ時計では，13時と１時は同じ表示で，次のようになっている．

$$13=1\ (\mathrm{mod}\ 12) \tag{3.66}$$

【補２】　**真理値表作成上の注意**

真理値表は変数の１と０のあらゆる組合せに対して関数がどういう値をとるかの表である．変数がいくつもあるとき，１と０の組合せのすべてを列挙するのに次のようにすればよい．たとえば p_1, p_2, p_3, p_4 なる４変数の０と１の組合せをあげると表３．６のようになる．これは２進法４けたの数を列挙したものとみることができる．４けたの２進数は０から15まで $16=2^4$ 個ある．同様に n 変数の場合は２進法 n けたの数を列挙すればもらすことがない．

表 3.6

p_1	p_2	p_3	p_4		p_1	p_2	p_3	p_4	
0	0	0	0	0	1	0	0	0	8
0	0	0	1	1	1	0	0	1	9
0	0	1	0	2	1	0	1	0	10
0	0	1	1	3	1	0	1	1	11
0	1	0	0	4	1	1	0	0	12
0	1	0	1	5	1	1	0	1	13
0	1	1	0	6	1	1	1	0	14
0	1	1	1	7	1	1	1	1	15

3.3.3 二三の論理演算

論理演算には上に述べた否定，論理積，（包含的）論理和，排他的論理和のほかにも種々のものがある．ここではよく知られたもの二三について述べる（後に2項演算のすべてについて述べる）．

（**a**） **含意**（implication, conditional）　$p \to q$ または $p < q$

pならば q (if p then q, p implies q, q follows from p, q is deducible from p) と読む．p が真で q が偽なるときだけ偽となる命題を表わす．真理値表で示したものが表 3.7 で，これは $\bar{p} \vee q$ と一致する．例をあげると

表 3.7 含意

p	q	$p \to q$	$\bar{p} \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

p：雨が降る

q：かさをもっていく

とすると，$p \to q$ は

$p \to q$：雨が降ればかさをもっていく

ということになる．p が真で q が真なら $p \to q$ が真となるのは明らかであり，p が真で q が偽なら（雨が降っていて，かさをもって行かないなら）$p \to q$ は，偽となることも明らかである．p が偽なら（雨が降っていないなら）q は真（かさをもっていく）でも偽（かさをもっていかない）でも $p \to q$ は真と考えるのである．別の例を考えよう．

p：正方形である

q：4辺等しい

とすると

$p \to q$：正方形ならば4辺等しい

となる．つまり $p \to q$ は **q は p の必要条件である**ということに相当する．十分条件であるとは限らない．

（**b**） **対等**（equivalence, biconditional）　$p \rightleftarrows q$

p は q に対等である（p is equivalent to q）と読む．これは $p \to q$ でかつ $q \to p$，すなわち

$$p \rightleftarrows q = (p \to q) \cdot (q \to p) \qquad (3.67)$$

で，真理値表は表3.8である．$p \to q$ と $q \to p$ の真理値から，その論理積をとって $p \rightleftarrows q$ の真理値が得られている．これから，$p \rightleftarrows q$ は p と q がともに真なるときと，ともに偽なるとき真となることが知られる（つまり，$p \rightleftarrows q \equiv T$ なら，$p \equiv q$ となる）

表 3.8 対等（対偶）

				対等	対偶
p	q	$p \to q$	$p \to q$	$p \rightleftarrows q$	$\bar{p} \rightleftarrows \bar{q}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

対等 $p \rightleftarrows q$ は **q は p の必要十分条件**であるということに相当する．例をあげると

p：正方形である

q：4辺，4角等しい

とすると

$p \rightleftarrows q$：正方形であるための必要十分条件は，4辺，4角が等しいこととなる．

なお $p \rightleftarrows q$ の対偶を考えると明らかに

$$\bar{p} \rightleftarrows \bar{q} \tag{3.68}$$

となる．われわれは中学や高校で，ある問題を証明するのにその対偶を証明するという手段を用いたものである．$p \rightleftarrows q$ と $\bar{p} \rightleftarrows \bar{q}$ とは同じはずで，両者の真理値表を書いてみると表3．8に示したように一致している．このとき両者は等値であるといい

$$p \rightleftarrows q \equiv \bar{p} \rightleftarrows \bar{q} \tag{3.69}$$

と表わそう．

（c） **シェファーの縦棒** (Sheffer's stroke) $p|q$

***p* と *q* は両立せず**と読む．これは p と q がともに真なるときだけ偽となる命題である．真理値表は表3．9のようで $\overline{p \cdot q}$ と一致する．$p \cdot q$ はアンド (and) の演算といわれ，$\overline{p \cdot q}$ はその否定であるから**ナンド** (nand) の演算ともいわれる．

表 3.9 シェファーの縦棒

p	q	p/q	$\overline{p \cdot q}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

表 3.10 論理減算

p	q	$p-q$	$p \cdot \bar{q}$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

（d） **論理減算** $p-q$

論理和や論理積に対して論理減算は表3．10に示すような真理値表で定義される．これから

$$\left.\begin{aligned} 0-0&=0\\ 0-1&=0\\ 1-0&=1\\ 1-1&=0 \end{aligned}\right\} \tag{3.70}$$

となる．通常の代数の加算と減算は逆演算になっているが，論理和と論理減算はそうではない．なお $p-q$ と $p \cdot \bar{q}$ の真理値表が一致することは容易に確かめられる．したがって

$$p-q \equiv p \cdot \bar{q} \tag{3.71}$$

この式を暗記するには次のようにすればよい．すなわち，$p-q$ の“－”の記号が q の頭上に移行して $p \cdot \bar{q}$ となったと考える．

【問1】 次の等値式を真理値表から確かめよ．

（i） $p \cdot (p \vee q) \equiv p$ (3.72)

（ii） $p \cdot (q \vee r) \equiv (p \cdot q) \vee (p \cdot r)$ (3.73)

3.3.4 命題論理，記号と約束

論理的な推論を数学的な記号法を用いて研究する論理学あるいは数学は，**記号論理** (symbolic logic)，**数理論理学** (mathematical logic) あるいは**理論的論理学**（独：Theoretische Logik）などとよばれる．その中で，いままで述べたような（そして今後も述べる）論理演算によって作られた論理式（複合命題にあたる）に関して，その真偽や等値などを研究する部門を**命題論理** (propositional logic) あるいは**命題算**という．たとえば

p：地球は自転している

q：彼女は美人である

とすると，$p \to q$ は

$p \to q$：地球が自転しているなら彼女は美人である

となる．地球の自転と彼女の美醜とは関係がないから，$p \to q$ が真であるか偽であるかは無意味であるが，命題論理では p が真で q も真，すなわち彼女が本当に美人なら $p \to q$ は真であるとする．彼女が美人でないなら $p \to q$ は偽である．

以下には命題論理を述べるについて，記号その他約束や注意を列挙して述べよう．

（a） **演算記号**　演算記号は，論理代数が取り上げられる場合によって異なるし，人によっても好みがあって異なっている．表 3.11 には数種の記号群を列挙した．(1)は記号論理でよく用いられるものであるが，なれるまで見にくい．(2)と(3)は本書のように工学に応用される場合などによく用いられる．(2)のほうが見やすいが，論理和を $p+q$ とすると通常の和と混同するおそれがある．これに対し(3)を用いると，たとえば

$$1 \vee 1 = 1 \qquad 1+1=2 \tag{3.74}$$

とすることができて，論理和と通常の加え算と区別される．また，積のほうは，論理積と通常の代数の積と混同してもさしつかえない．というのは論理代数でも通常の代数でも

$$1 \cdot 1 = 1, \quad 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0, \quad 0 \cdot 0 = 0 \tag{3.75}$$

が成り立つ．たた論理代数では 1 と 0 しか用いないだけである．

表 3.11　論理演算の記号

演算	(1) 記号論理	(2)	(3) 本書	(参考) 集合論
論理積	$p \wedge q$	$p \cdot q$	$p \cdot q$	$P \cup Q$
包含的論理和	$p \vee q$	$p+q$	$p \vee q$	$p \cup Q$
排他的論理和	$p \underline{\vee} q$	$p \oplus q$	$p \oplus q$	—
否定	$\sim p$	$\bar{p}$	$\bar{p}$	$\tilde{p}$
含意	$P \supset q$，$p > q$	$p \to q$	$p \to q$	$P \supset Q$

表の最後に述べたものは，後に述べるが（3.4.1 参照）集合に関する代数と対比したものである．

（b） **優先の約束，その他**

通常の代数でも掛け算は加え算に優先すると約束しているのと同様に，論理積は論理和その他に優先するものと約束しよう．また $p \cdot q$ の中の点は略してもよいと約束する．したがって

$$p \vee (p \cdot q) = p \vee pq \tag{3.76}$$

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot r) = pq \vee pr \tag{3.77}$$

などと書く．逆にまた論理積であることを明確にするほうがよいと思われる場合は $p \wedge q$ と書く．たとえば積集合の定義を先に

$$P \cap Q = \{x | x \in P,\ x \in Q\} \tag{3.78}$$

としたが，命題論理の記号を用いて

$$P \cap Q = \{x | (x \in P) \wedge (x \in Q)\} \tag{3.79}$$

と表わすことができ，このとき論理積の記号として $\wedge$ を用いるほうが明確である．

以下本書では $\to$，$\leftrightarrows$，$\vee$，$\wedge$ などの記号によって記述することもある．たとえば式（3.38）の

$$A \times B = \phi \text{ は } \quad A = \phi \quad \text{または } B = \phi \tag{3.80}$$

と書く代わりに

$$[A \times B = \phi] \rightleftarrows [(A = \phi) \vee (B = \phi)] \tag{3.81}$$

と書き表わしたり，式（1.1.45）を

$$[(A \times B) \subseteq (C \times D)] \rightleftarrows [(A \subseteq C) \wedge B \subseteq D] \tag{3.82}$$

と簡単に，しかも明確に書き表わすことがある．

（c） **記号"≡"と"＝"**　命題が等値であるというときは"≡"を用いる．たとえば

$$p\cdot(q \vee r) \equiv p\cdot q \vee p\cdot r \tag{3.83}$$

しかし，上の式でもこれを後に述べる論理関数の等式とみるときには〝＝〟を用いて次のように表わす．

$$p\cdot(q \vee r) = p\cdot q \vee p\cdot r \tag{3.84}$$

なお，真や偽を T や F で表わす代わりに1と0で表わした場合は論理式とみなして〝＝〟を用いることとする．

3.3.5 基本的な等値式

次のような等値式が成立する．

$$\text{（べき等律）}\begin{cases} A \vee A \equiv A & (3.85.\text{a}) \\ A \cdot A \equiv A & (3.85.\text{b}) \end{cases}$$

$$\text{（交換律）}\begin{cases} A \vee B \equiv B \vee A & (3.86.\text{a}) \\ A \cdot B \equiv B \cdot A & (3.86.\text{b}) \end{cases}$$

$$\text{（結合律）}\begin{cases} (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C) & (3.87.\text{a}) \\ (A \cdot B) \cdot C \equiv A\cdot(B \cdot C) & (3.87.\text{b}) \end{cases}$$

$$\text{（分配律）}\begin{cases} A(B \vee C) \equiv (A \cdot B) \vee (A \cdot C) & (3.88.\text{a}) \\ A \vee (B \cdot C) \equiv (A \vee B)\cdot(A \vee C) & (3.88.\text{b}) \end{cases}$$

$$\text{（吸収律）}\begin{cases} A \vee (A\cdot B) \equiv A & (3.89.\text{a}) \\ A \cdot (A \vee B) \equiv A & (3.89.\text{b}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T \vee A \equiv T \quad (1 \vee A = 1) & (3.90.\text{a}) \\ F \cdot A \equiv F \quad (0 \cdot A = 0) & (3.90.\text{b}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F \vee A \equiv A \quad (0 \vee A = A) & (3.91.\text{a}) \\ T \cdot A \equiv A \quad (1 \cdot A = A) & (3.91.\text{b}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \vee \overline{A} \equiv T \quad (A \vee \overline{A} = 1) & (3.92.\text{a}) \\ A \cdot \overline{A} \equiv F \quad (\overline{A} \cdot A = 0) & (3.92.\text{b}) \end{cases}$$

その他ド・モルガンの定理として知られている次の式は有名である．

$$\text{ド・モルガンの定理}\begin{cases} \overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \cdot \overline{B} & (3.93.\text{a}) \\ \overline{A \cdot B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B} & (3.93.\text{b}) \end{cases}$$

これらの式の成立することは真理値表から確かめられる．一例として，ド・モルガンの定理の1つの式の真理値表を作ったものが表 3.12 である．あるいはこの式は次のことからも確かめられる．すなわち〝(A または B) でない〟ということは，〝AでもないしBでもないこと〟である．

これを式に書くと次のようになるのである．

$$\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \cdot \overline{B} \tag{3.94}$$

表 3.12 ド・モルガンの定理

A	B	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

3.3.6 論理変数，論理関数

p_1，p_2，$\cdots p_n$ が0か1の値しかとらない変数であ

るとき，これを**論理変数**という．$p_1, p_2, \cdots, p_n$ が0か1の値をとるとき，$f(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ が0か1に決まるとき，これを**論理関数**という．論理関数 $f(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ と $g(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ が相等しいということは，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ のあらゆる0と1の組合せに対しても f と g が同じ値をとるということである．換言すると，f と g の真理値表が一致したとき両者は相等しいと定義し

$$f(p_1, p_2, \cdots, p_n) = g(p_1, p_2, \cdots, p_n) \tag{3.95}$$

と書く．

先に述べた命題算において，命題 p, q, r を論理変数に，複合命題を論理関数に対応させ，命題の真偽すなわち T と F をそれぞれ1と0に対応せしめることができて取扱うことができる．

（例3.3） いま，p, q, r なる3人の学生が一緒に旅行するかどうかを相談していたが，多数決によって決めることになった．旅行に行くを1，行かないを0と表わすと，p, q, rを論理変数とみることができる．また3人の結論を $M(p, q, r)$ で表わすと，これは論理関数で，その真理値表は表3.13に示す通りである．このような多数決を**多数決論理**（majority logic）といい，特に3変数の場合は後にも述べるが，**メジアン**（median）といわれ，

$$\begin{aligned} M(p, q, r) &= qr \vee rp \vee pq \\ &= (q \vee r)(r \vee p)(p \vee q) \end{aligned} \tag{3.96}$$

と表わされる．この式が成立することは，真理値表が一致することから確かめられる．読者は試みられたい．

表 3.13 ジアメンの真理値表

p	q	r	$M(p,q,r)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

3.4 ブール代数

3.4.1 命題と集合との関係

先は3.3.5に述べた基本的な等値式群と，集合に関する式（3.45.a）～（3.52.b）を比べてみると

和集合	$A \cup B$	に対し	論理和	$A \vee B$
積集合	$A \cap B$	に対し	論理積	$A \cdot B$　$(A \wedge B)$
補集合	$\widetilde{A}$	に対し	否　定	$\overline{A}$
普遍集合	I	に対し	T（あるいは1）	
空集合	ϕ	に対し	F（あるいは0）	

と1対1対応させると，まったく同じ式群になる．これはつまり両者が同じ基礎の上に立っているということで，1つの理論として統一されることを意味する（後にブール代数として述べる）．ここではもうすこし具体的な対応について述べよう．

以下集合を大文字で，命題を小文字で表わそう．いまある普遍集合 I を考える．たとえば果物の集合としよう．これらの果物に対して命題 p, q, r と集合 P, Q, R を次のように定義する．

p：大きい，　　P：大きい果物の集合

q：赤い，　　Q：赤い果物の集合

r：形が良い，　　R：形の良い果物の集合

p, q, r に対してそれぞれ P, Q, R を**真理集合**（truth set）という．P は p が真である対象物の集

合である．同様に

$$\bar{p}\ \text{の真理集合は}\quad \widetilde{P}$$
$$p \vee q\ \text{の真理集合は}\quad P \cup Q$$
$$p \cdot q\ \text{の真理集合は}\quad P \cap Q$$

などとなることは明らかである．またつねに真なる命題$T(1)$に対しては普遍集合Iを，つねに偽なる命題$F(0)$には空集合ϕを対応せしめればよいことは明らかである．

ここで次のような疑問を生じるかもしれない．たとえばpを

p：地球は自転している

とすると，その真理集合は何かと．先にも述べたように，命題算自体は，命題の具体的内容を論じるものでないから，地球が自転しているという命題の代わりに，果物は大きいという命題と入れかえてもさしつかえなく，その真偽だけ同じであればよい．また地球が自転しているという命題がつねに真であるとするなら，それを1とおきかえれば，真理集合は普遍集合Iになる．

命題の等値，すなわち論理関数が等しいかどうかを調べるのに真理値表を用いることができた．この真理値表の手法は集合の場合も用いることができるはずである．これについて述べよう．いま普遍集合Iの部分集合をP，Qとする．任意の元$x \in I$を考えると，これはPに属することもあれば属さないこともある．同じくQに属することも属さないこともある．xがPに属せばPの下に1と書き，属さなければ0と書くと，任意の元xはPとQに対して次の4通りの場合がある．

P	Q		
0	0	$\rightleftarrows x \notin P,\ x \notin Q$	（xはPにもQにも属さない）
0	1	$\rightleftarrows x \notin P,\ x \in Q$	（xはPに属さず，Qに属す）
1	0	$\rightleftarrows x \in P,\ x \notin Q$	（xはPに属し，Qに属さない）
1	1	$\rightleftarrows x \in P,\ x \in Q$	（xはPにもQにも属する）

このおのおのの場合について，たとえばxが$P \cup Q$に属するか否かの表を作れば$P \cup Q$の真理値表ができる．表3.14には，この真理値表の手法によって，ド・モルガンの定理の1つの式

$$\widetilde{P \cup Q} = \widetilde{P} \cap \widetilde{Q} \qquad (3.97)$$

を証明したものである．

表 3.14 集合における真理値表の手法

P	Q	$P \cup Q$	$\widetilde{P \cup Q}$	$\widetilde{P}$	$\widetilde{Q}$	$\widetilde{P} \cap \widetilde{Q}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

3.4.2 ブール代数

前項において，命題の問題と，集合の問題とが同じ基礎数理の上に立っていることを示した．これがここに述べようとするブール代数である．いいかえると，**3.1**や**3.3**では集合や命題というモデルから帰納的にブール代数というものの存在意義が示されたということができる．ここでは，公理群を列挙することより，演繹的にブール代数を定義しよう．

定義：ブール代数　次のような代数系をブール代数という．

（1）集合Sにおいて，2つの2項演算$s \vee t$および$s \cdot t\ (s \in S,\ t \in S)$が定義されていて，次の諸式が成り立つ（ただし，下線を引いた式群だけが独立であり，公理である．他の式群は参考のため

に列挙したもので定理である).

$$
\text{(べき等律)}\begin{cases} s \vee s = s & \text{(3.98. a)} \\ s \cdot s = s & \text{(3.98. b)} \end{cases}
$$

$$
\text{(交換律)}\begin{cases} \text{公理 I–a} \quad \underline{s \vee t = t \vee s} & \text{(3.99. a)} \\ \text{公理 I–b} \quad \underline{s \cdot t = t \cdot s} & \text{(3.99. b)} \end{cases}
$$

$$
\text{(結合律)}\begin{cases} (s \vee t) \vee u = s \vee (t \vee u) & \text{(3.100. a)} \\ (s \cdot t) \cdot u = s(t \cdot u) & \text{(3.100. b)} \end{cases}
$$

$$
\text{(分配律)}\begin{cases} \text{公理 II–a} \quad \underline{s \cdot (t \vee u) = (s \cdot t) \vee (s \cdot u)} & \text{(3.101. a)} \\ \text{公理 II–b} \quad \underline{s \vee (t \cdot u) = (s \vee t) \vee (s \vee u)} & \text{(3.101. b)} \end{cases}
$$

$$
\text{(吸収律)}\begin{cases} s \vee (s \cdot t) = s & \text{(3.102. a)} \\ s \cdot (s \vee t) = s & \text{(3.102. b)} \end{cases}
$$

(2) 次の式を満たす単位元1と零元0がSに含まれる.

$$1 \vee s = 1 \qquad \text{(3.103. a)}$$

$$0 \cdot s = 0 \qquad \text{(3.103. b)}$$

$$
\begin{cases} \text{公理 III–a} \quad \underline{0 \vee s = s} & \text{(3.104. a)} \\ \text{公理 III–b} \quad \underline{1 \cdot s = s} & \text{(3.104. b)} \end{cases}
$$

(3) Sに属する任意の元sに対し,その補元$\bar{s}$がSに含まれ,次の諸式を満たす.

$$
\begin{cases} \text{公理 IV–a} \quad \underline{s \vee \bar{s} = 1} & \text{(3.105. a)} \\ \text{公理 IV–b} \quad \underline{s \cdot \bar{s} = 0} & \text{(3.105. b)} \end{cases}
$$

なお,下線のない式群すなわち定理群は,式線のある式群すなわち公理から導くことができる.ここでは紙面の都合上略する.

3.4.3 ブール代数における双対性と積優先の約束

前項に示したブール代数の公理を調べると,次のようないちじるしい性質のあることが知られる.たとえば公理 I–a と I–b を比べてみると,前者における演算 ∨ を,演算・とおきかえると後者が得られる.公理 II–a と II–b では,一方の式における ∨ を・に,・を ∨ に入れかえると他方の式が得られる.また公理 III–a と III–b では, 0を1に, ∨ を・に入れかえると一方の式から他方の式に変わる.この性質を**双対性** (duality) という.ブール代数の公理においては

$$
\begin{array}{ccc} \vee & \text{に対し} & \cdot \\ 1 & \text{に対し} & 0 \end{array}
$$

という関係において双対性をもっている.

なお,公理が上のような双対性をもっているから,その上に立てられたブール代数は全体として上のような双対性をもつことになる.この性質によって,たとえばド・モルガンの定理の一方の式

$$\overline{s \vee t} = \bar{s} \cdot \bar{t} \qquad \text{(3.106. a)}$$

が成り立つことが証明されたとすると，これに双対なもう一方の式

$$\overline{s \cdot t} = \bar{s} \vee \bar{t} \tag{3.106. b}$$

の成立は，同時に証明されたと考えることができる．次の項に示す諸定理の a と b（たとえば定理 I-a と定理 I-b は，いずれも双対である。

なお，以下では演算 $s \cdot t$（これを積と呼ぼう）は，演算 $s \vee t$（和とよぼう）に優先すると約束しよう．また記号・は略すことがある．たとえば $s \vee (s \cdot t)$ は $s \vee st$ と書き表わす．

3.4.4 命題論理とブール代数，命題と真理集合と論理変数（関数）

これまで述べたところでは，命題論理や集合の和，差などから，ブール代数という概念を抽出した．したがって，命題論理に関する等式（たとえばド・モルガンの定理）を，ブール代数における式と考え，ブール代数の公理からその成立を証明すれば，命題論理においても成立することが証明されたとみることができる．逆に，ブール代数における等式を証明するのに，これを論理関数に関する式とみなし，真理値表を用いる手法などで証明すれば，それでよいのだろうかという疑問が残る．答は，それでよいのである．しかしこれには証明が必要である．この証明はかなり面倒であるから略す．

なお，一般的にいって，等式の証明などにおいては，ブール代数の公理から証明するよりも，これを論理関数に関する式とみなして真理値表の手法を用いるほうが容易である．たとえばド・モルガンの定理 VI-a を証明するのに，定理の証明のようにするのと，表 3.13 のように真理値表を用いるのとでは，後者のほうが楽である．

なお以下では論理変数（関数）p というと，場合によって，これは命題と考えることもあれば，真理集合とも考えることもあるとする．