研究ノート

境界要素法の基本と応用

田　中　正　隆*

1．まえがき

境界要素法（Boundary Element Method, BEM と略す）という解析法が最近とみに脚光を浴びている．この解法は，微分方程式を積分方程式に変換して解く方法であり，物理数学の領域では古くからよく知られた解法である．最近重みつき残差法に基づく新しい定式化と離散化が提案されて以来急速に発展してきた．差分法や有限要素法（以下 FDM や FEM と略す）などのいわゆる領域型解法の強力な競争者と考えられているばかりでなく，ある領域では FDM や FEM を駆逐してしまいそうな状況にある．

本研究ノートでは，BEM に基づく解析法のあらましと最近の研究動向を概観し，あわせて将来への展望を試みる．

2．重みつき残差表示と境界積分方程式

支配微分方程式を境界上の積分方程式に変換する方法を示す．

領域Ω内で支配方程式が

$$\boldsymbol{Lu}+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0} \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

で表わされる境界値問題を考える．ここで，$\boldsymbol{L}$ は線形微分作用素，$\boldsymbol{u}$ は求めるべき解，$\boldsymbol{f}$ は与えられた関数である．任意の関数 $\boldsymbol{v}$ を導入したとき，Green の定理を用いれば次式を得る．

$$\int_\Omega [\boldsymbol{Lu}]\cdot \boldsymbol{v}d\Omega=\int_\Omega \boldsymbol{u}\cdot[\boldsymbol{L^*v}]d\Omega$$
$$+\int_\Gamma ([\boldsymbol{Gv}]\cdot[\boldsymbol{Su}]-[\boldsymbol{Gu}]\cdot[\boldsymbol{Sv}])d\Gamma \quad \cdots(2)$$

ここで $\boldsymbol{S}$ および $\boldsymbol{G}$ は線形作用素，$\boldsymbol{L}^*$は $\boldsymbol{L}$ の随伴作用素である．また Γ は考えている領域Ωの境界を表わすものとする．つぎの境界条件が考えられる．

(i) Γ_G 上で $\boldsymbol{Gu}$ が規定される；$\boldsymbol{Gu}=\overline{\boldsymbol{Gu}}$

(ii) Γ_S上で $\boldsymbol{Su}$ が規定される；$\boldsymbol{Su}\equiv\boldsymbol{p}=\bar{\boldsymbol{p}}$
$$\cdots\cdots\cdots(3)$$

さて，無限媒体中において

$$\boldsymbol{L}^*\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}_1)+\boldsymbol{1}\ \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{0}\cdots\cdots\cdots(4)$$

を満たす関数 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ を考える．ここで $\delta(\cdot)$ は Dirac のデルタ関数，$\boldsymbol{1}$ は単位テンソルである．$\boldsymbol{u}$ は無限遠方で同次境界条件を満たすものであり，式(1)の基本解と呼ばれる．種々の $\boldsymbol{L}^*$ について基本解はすでに求められている．ここで $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}_1$ は，図1に示すようにΩ内の任意の2点の位置ベクトルを，また $\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{\sigma}_1$ はΓ上の任意の2点を表わす．

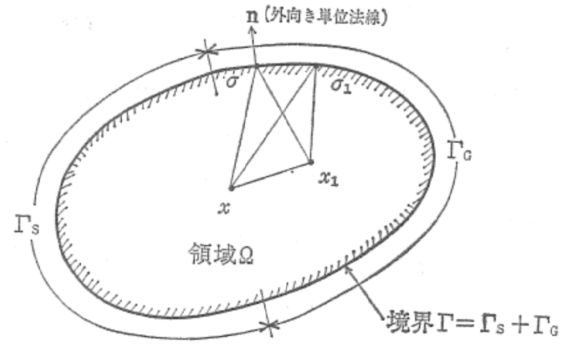

図1　境界値問題

以上により，式(1)を式(3)の境界条件のもとで重みつき残差法で解く準備が整ったことになる．すなわち，基本解を重み関数としてつぎの重みつき残差表示を考える．

$$\int_\Omega \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}_1)\cdot[\boldsymbol{L}^1\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_1)+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)]d\Omega_1$$
$$=\int_{\Gamma_S} \boldsymbol{G}\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\sigma}_1)]\cdot[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\sigma}_1)-\bar{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\sigma}_1)]d\Gamma_1$$
$$-\int_{\Gamma_G} \tilde{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\sigma}_1)\cdot[\boldsymbol{G}^1\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\sigma}_1)-\overline{\boldsymbol{G}^1\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\sigma}_1)]d\Gamma_1$$
$$\cdots\cdots\cdots(5)$$

*田中正隆（Masataka TANAKA），大阪大学，工学部機械工学科，工学博士，材料力学

ただし

$$\tilde{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\sigma}_1)\equiv\boldsymbol{S}^1\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\sigma}_1) \quad \cdots\cdots\cdots(6)$$

式(2)と Green の定理を用いると，式(5)からつぎの積分方程式が得られる．

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x})+\int_\Gamma([\boldsymbol{G}^1\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\sigma}_1)]\cdot\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\sigma}_1)-\tilde{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\sigma}_1)\cdot[\boldsymbol{G}^1\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\sigma}_1)])d\Gamma_1 \quad \cdots\cdots\cdots(7)$$

ただし

$$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x})=\int_\Omega \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1)\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)d\Omega_1 \quad \cdots\cdots\cdots(8)$$

さらに，$\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{\sigma}$ の極限を考えると式(8)は一般に

$$c\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\sigma})=\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\sigma})+\int_\Gamma([\boldsymbol{G}^1\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}_1)]\cdot\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\sigma}_1)-\tilde{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}_1)\cdot[\boldsymbol{G}^1\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\sigma}_1)])d\Gamma_1 \quad \cdots\cdots\cdots(9)$$

点 $\boldsymbol{\sigma}$ で Γ が滑らかなときは，$c=1/2$ となる．

3．離散化と解法

以上のような変換を施すと，領域Ω内で微分方程式を解くかわりに，境界Γ上の積分方程式(9)を解けばよいことがわかる．Ω内の方程式を解析の対象にする FDM や FEM などでは，Ωを要素分割して近似解を求めなければならないが，ここで考えている BEM では境界Γを分割するだけでよいことになる．すなわち，BEM では3次元問題は2次元問題にというように，問題の次元を1つだけ下げることができるわけであり，BEM 解析の最大の長所はこの点にあると考えられている．

境界Γの要素分割については，FEM で確立されている離散化手法をそのまま用いることができる．いまΓをn個の要素に分割するものとし，1つの要素内で $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\sigma})$，$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\sigma})$ などがそれぞれ，$\boldsymbol{\Phi}$ を内そう関数として

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\sigma})=\boldsymbol{\Phi}\,\boldsymbol{u}_j,\ \ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\sigma})=\boldsymbol{\Phi}\,\boldsymbol{p}_j \quad \cdots\cdots\cdots(10)$$

のように節点値 $\boldsymbol{u}_j$，$\boldsymbol{p}_j$ で表わされるものと仮定する．このようにしたとき，式(9)はつぎのような代数方程式に変換される．

$$c\boldsymbol{u}^i+\sum_{j=1}^{n}\hat{\boldsymbol{H}}_{ij}\boldsymbol{u}_j=\boldsymbol{\pi}_i+\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{G}_{ij}\boldsymbol{p}_j \quad \cdots\cdots\cdots(11)$$

さらに，Γ_G 上で $\boldsymbol{u}_j$ が，また Γ_S 上で $\boldsymbol{p}_j$ が既知であることを考え合わせれば，式(11)は

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{F} \quad \cdots\cdots\cdots(12)$$

の形の連立方程式にまとめることができる．上式を未知の境界節点値ベクトル$\boldsymbol{X}$について解けば，問題が解決できることになる．Ω内の任意点の$\boldsymbol{u}$などは，このようにして求めた$\boldsymbol{X}$を用いて，境界内の積分方程式(7)によって計算できる．このように BEM では，近似解を数値微分することなしにΩ内のすべての値が求められることになり，FDM や FEM などの領域法に比べると一般に解析精度が良いことも重要な特長の一つである．

4．応用と将来性

式(1)の作用素$\boldsymbol{L}$に問題ごとの微分方程式に対応するものを代入すれば，上述の BEM 定式化はあらゆる境界値問題に応用でさる．例えば，Laplace 方程式あるいは Poisson 方程式は$\boldsymbol{L}$をΓ^2に$\boldsymbol{u}$をスカラθで置換すればよい．この問題の解析はすでに数多くの例題について行なわれ，BEM の有用性を示すための好個の例になっている．また，Navier の式によって支配される線形弾性問題は，$\boldsymbol{u}$を変位，$\boldsymbol{f}$を物体力とするとき，式(1)の成分表示は

$$L_{ij}u_j+f_i=\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}+\frac{\mu}{1-2\nu}\ \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\partial x_j}+f_i=0 \quad \cdots\cdots\cdots(13)$$

となり，上述の定式化をそのまま用いることができる．ただし，式(13)のμおよびνはそれぞれ横弾性係数および Poisson 比である．この方式による平面弾性問題の解析例を付録に示す．

式(13)の$\boldsymbol{f}_i$の項に熱伝導解析から求められる温度変化による項を含ませると，熱弾性問題の解析が可能になる．この方法によって，原子炉圧力容器やタービン翼など実用上重要な問題がすでに解析されている．さらに，塑性やクリープなどによる非線形性を見かけの外力として$\boldsymbol{f}_i$項に含ませれば，材料非線形問題が解析できることになる．この方式によって，土質力学における大規模な弾塑性解析が試みられている．

このようにして BEM は今後，動的問題ならびに高度の非線形問題，とくに大変形や時間依存の材料非線形問題へ応用され，適用範囲は

さらに拡大して行くものと考えられる．

5．あとがき

以上に述べてきたように，BEM はすでに多くの問題に応用されて著しい成果をあげてきており，線形弾性問題では FEM に基づいて作成された解析システムに取って代るような状況にあることは注目に値する．BEM は領域型解法の苦手とする問題，たとえば3次元問題や無限遠方に境界のある問題などにおいて，とくにその有用性が発揮されることは容易に想像できる．今後，動的問題や非線形問題についての効果的な BEM 解析法の研究が大いに活発になるものと考えている．筆者もこの方向に沿って微力ながら努力するつもりである．

終りに，本研究ノートをまとめるにあたり，下記文献を参考にしたことを付記する．

参考文献

1）神谷・田中・田中訳（ブレビア著）：境界要素法入門，培風館，(1980).

2）神谷・田中・田中訳（ブレビア・ウォーカー著）：境界要素法の基礎と応用，培風館，(1981).

3）Tanaka, K. and Tanaka, M.：Time-Space Boundry Element Formulation for Boundary-Value Problems, Applied Mathematical Modelling, Vol. 4, (1980), pp. 473—476.

付　　録

科学研究費の援助を受け，筆者らは目下各種問題のパイロットプログラムを開発中である．図2ないし4には，開発したプログラムによる平面線形弾性問題の解析例を示す．

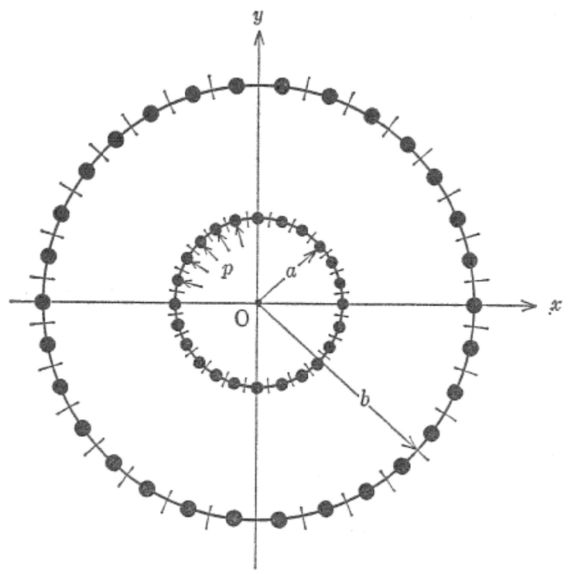

図2　内圧を受ける厚肉円管の境界要素分割（一要定素，a/b=3/8）

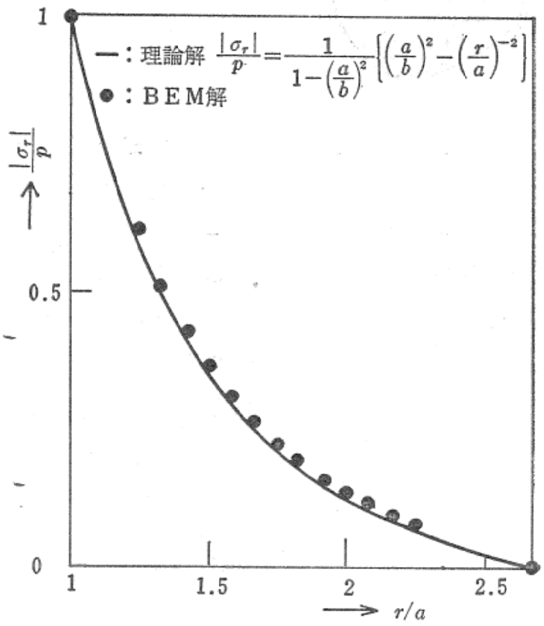

図3　半径方向応力分布

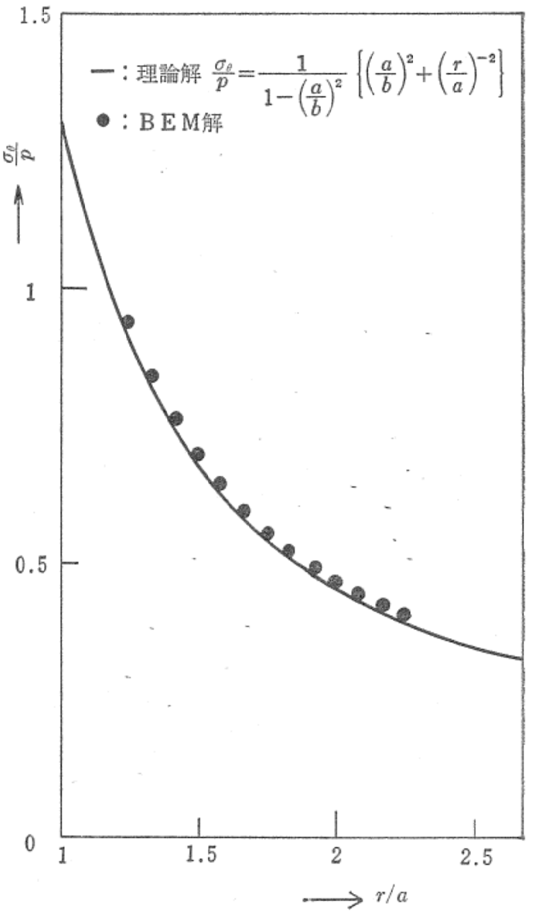

図4　円周方向応力分布