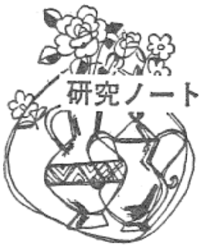


システムの信頼性と経済性

田　畑　吉　雄*

1. はじめに

時間の経過に従って劣化し，偶発的に故障する部品から構成されたシステムの信頼性を高めるためには，各部品の品質や精度を改善するハード面での努力と同時に，予防保全，冗長システムの構成などソフト領域での方策が望まれる．特に，与えられた品質をもつ部品が偶発故障を起こすことによって生ずるシステム・ダウンを回避するための予防保全として，取り替え問題が重要な役割りを演じている〔1〕，本稿では，定められた計画期間，システムを最小費用で維持するために，修理を考慮した取り替え政策〔2〕と，並列冗長システムの故障時における部品配分問題〔3〕について考察しよう．

2. 修理とアイドルタイム

現実に広く利用されている取り替え政策は，部品の使用時間が一定値を越えるか，または故障した場合に新品と取り替える年齢取り替えと，部品の新旧にかかわらず一定時間毎に一斉に取り替える周期取り替えとに大別できる．本節では後者に注目し，取り替え間隔をTで表わそう．使用時間xの部品（年齢x）の故障率を$\lambda(x)$，この部品の故障に際しては修理時間分布$R(t)$に従って修理可能とする．修理中はシステムは停止するから，遊休損失額を単位時間当りC，修理のための固定費を1回当りKとする．周期取り替え時点直前の故障に対しては，修理を施すよりも放置しておく方が有利であるから，このような遊休も考慮することにし，アイドルタイムと呼ぼう．問題は，総期待費用を最小にするよう故障直後に取るべき行動（修理か放置か）を決定することである．

さて，

$u(x, y)$＝計画期間が残りxの時，年齢yの部品が故障した直後，最適行動を取ったことによる総期待費用

$v(x, y)$＝計画期間が残りxの時，年齢yの部品が稼動している場合の総期待費用

と定義すれば，動的計画法の最適性の原理より

$$(1)\quad u(x, y)=\min\left\{\begin{array}{l} Cx \\ K+\int_0^x\{Ct+v(x-t, y)\}dR(t)+Cx\int_x^\infty dR(t)\end{array}\right.$$

および

$$(2)\quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}-\frac{\partial v(x, y)}{\partial y}=\lambda(y)\{Cx-v(x, y)\}$$

$$v(0, y)=0$$

が成り立つ．(1)，(2)式より

$$u(x, y)=Cx+\min[0 ; K-CxR(x)+\int_0^x\{Ct+v(x-t, y)\}dR(t)$$

と書ける．ただし，

$$v(x, y)=\frac{C}{1-F(y)}\int_0^x\zeta f(x+y-\zeta)d\zeta$$

で，$f(\cdot)$および$F(\cdot)$は部品の寿命に対する密度と分布を表し，$\lambda(y)=f(y)/(1-F(y))$なる関係で与えられる．上式の〔　〕内はxに関して単調減少であることが証明でき，残り計画期間の長さがxの場合に部品が故障すれば

$$\left\{\begin{array}{l} 0<x\leq x(y)^* \text{ のとき放置する} \\ x>x(y)^* \text{ のとき修理する}\end{array}\right.$$

が最適行動であることが示される．ただし$x(y)^*$は，方程式

$$G_y(x)=K-CxR(x)-\frac{C}{1-F(y)}$$

*田畑吉雄（Yoshio TABATA），大阪大学工学部応用物理学科，助教授，工学博士，オペレーションズリサーチ

$$\left[\int_0^x R(t)\,dt+\int_0^x\int_y^{x+y-t}\bar{F}(\zeta)\,d\zeta\,dR(t)\right]=0$$

の唯一根であり，部品が故障した場合に修理すべきか否かの境界値を与える．この値は，例えば，自動車が故障した場合，即座に修理や買換えをすべきか，それとも次の車検まで我慢すべきかの境界であると解釈できる．

（例１）一般寿命分布，瞬時修理可能のとき

部品の寿命分布 $F(t)$ が平均mをもち，修理が瞬間的に可能で修理の結果新品同様になる場合には

$$u(x,\ y)=Cx+C\min[0\,;K/C-m+T_F(x)]$$

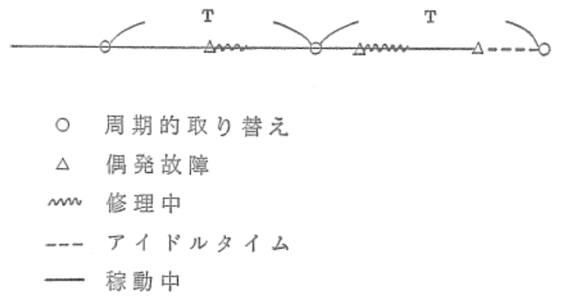


図 1

ただし

$$T_F(x)=\int_x^\infty (t-x)dF(t)$$

となる．$T_F(x)$ はxに関して非負，単調非増加な凸関数であることが知られているから，$m>K/C$ の時には

$$\begin{cases} x\geqq T_F^{-1}(m-K/C) & \text{の時には修理する} \\ x<T_F^{-1}(m-K/C) & \text{の時には放置する} \end{cases}$$

のが最適行動である．

（例２）指数寿命分布，指数型修理時間

現実の部品の寿命分布や修理時間分布はしばしば指数分布で近似的に表現されることが多い．そこで，寿命分布Fと修理時間分布Rを各々

$$F(t)=1-e^{-\lambda t},\quad R(t)=1-e^{-\mu t}$$

と表わせば

$$u(x,\ y)=Cx+\min\left[0\,;K+\frac{C\mu}{\lambda(\lambda-\mu)}(e^{-\lambda x}-e^{-\mu x})-\frac{C}{\lambda}(1-e^{-\mu x})\right]$$

と書ける．$\mu/\lambda=\rho(>1)$ の種々の値に対して境界値 x^* の値が数値計算でき，図２のようになり，実際上有効である．

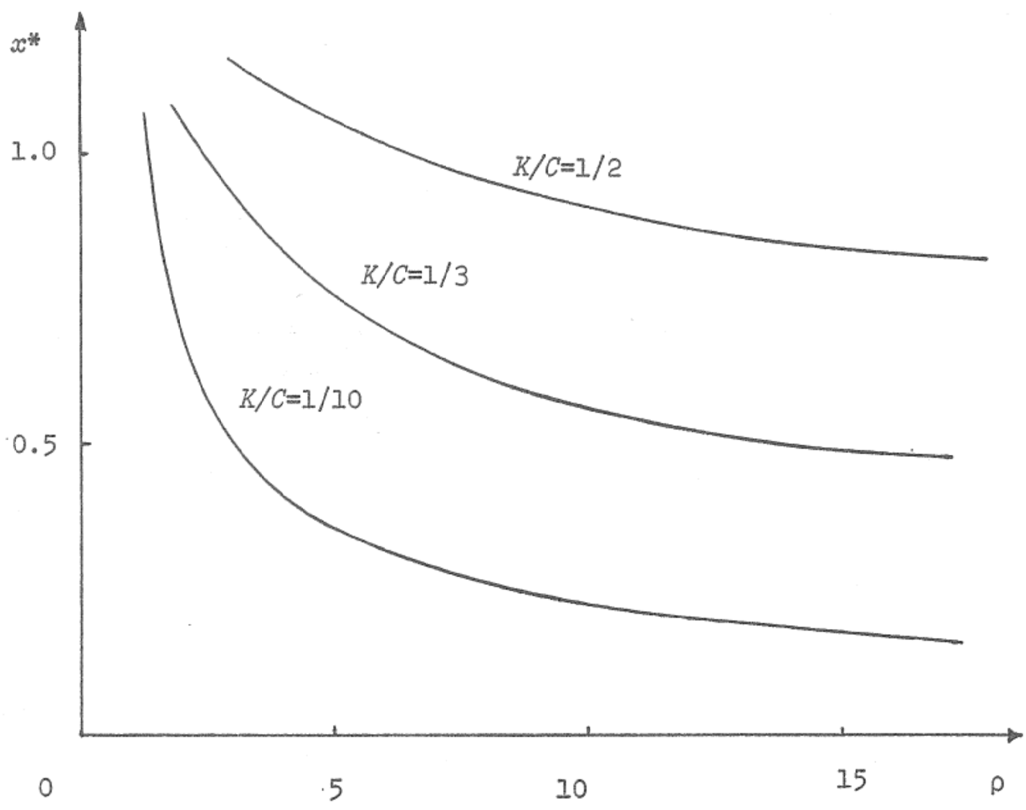
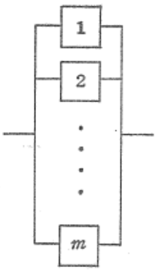


図 2

3．並列システムの逐次部品配分

システムの信頼性を高めるための予防保全以外の方法としては，並列システムまたは冗長システムの構成が一般的である．並列システムにおいては，それを構成する部品のうち最後に故障するもので寿命が定まり（最大寿命系），その不信頼度は構成部品の不信頼度の積で与えられる．例えば図3のように，各部品の故障確率がFのm並列システムに対する信頼度は $1-F^m$



*m*並列システム

図 3

で与えられ，m個の部品すべてが故障した時に初めてシスムダウンが生ずる．従って，$m\to\infty$ とすれば信頼度はいくらでも1に近づくが，重量やスペース，費用の制限などから2，3個の並列システムが用いられることが多い．そして，システムダウンすれば，すべての部品を取り替えて再び稼動させるという方法が採用されている．ところが，無限計画期間に対しては有効であるが，前節のように有限期間Xの場合には不経済な状況が生ずる．すなわち，計画期間の長さに応じて取り替える部品数を調節した方が有利であろう．本節では並列システムの故障に際し，費用最小の見地から取り替えるべき部品数を導出してみよう．次の記号を定義しておこう．

$f(t)$＝各部品の寿命の密度関数，C＝システムの単位時間当りの遊休損失費，L＝取り替えのための固定（段取り）費，K＝部品1個当りの費用，対象とするシステムはm個の並列システムで，計画期間の始めにはN個の部品を所有しているものとする．さらに，$V_n(x)$＝手元にn個の部品を所有し，システムの故障直後の残り計画期間がxの時，以後最適に取り替えを行った場合の総期待費用，と定義すれば

$0\leq x\leq X$，$n=1, 2, \cdots\cdots$，Nに対して

$$V_n(x)=\min\begin{cases} Cx \\ \min\limits_{j=1,\cdots,\min(m,\ n)}[L+jK+\int_0^x V_{n-j}(x-t)\, j(F(t))^{j-1}f(t)dt] \end{cases}$$

$$V_0(x)=Cx$$

が成り立つ．システムの故障直後における最適部品取り替え個数は，$f(t)$ と他のパラメータが具体的に与えられれば，上式を解くことによって求められる．ここでは $m=2$（two unit 並列システム）に対する一般的性質を述べておこう．

(i) $CE(T)>L+K$，$CE\{\max(T_1, T_2)\}>L+2K$ で，$L+K-CE(T)+CT_F(x_1^*)=0$

$L+2K-CE\{\max(T_1,T_2)\}+CT_{F2}(x_2^*)=0$

なる x_1^*，x_2^* が存在するならば

$$V_1(x)=Cx+\min\begin{cases} 0 & (x\leq x_1^*) \\ L+K-CE(T)+CT_F(x) & (x>x_1^*) \end{cases}$$

$$V_n(x)\begin{cases} =Cx & (x\leq \min(x_1^*,\ x_2^*)) \\ <Cx & (x>\min(x_1^*,\ x_2)) \end{cases}$$

が成り立つ．ただし，$F_2(t)=(F(t))^2$ であり，T_1 T_2 は分布 $F(t)$ をもつ互いに独立な確率変数である．すなわち，手持ち部品数が1個の時には，残り期間が x_1^* より短かければ放置し，長ければ手持ち部品と取り替える．さらに2個以上ある時には，残り期間が $\min(x_1^*, x_2^*)$ よりも長ければ，1個又は2個取り替えるのが最適であることを示している．

(ii) 残り期間が x_1^* より長く．$L=0$ の場合には1個ずつ取り替えるのがよい．

(iii) $L>0$ の場合には，$x>x_1^*$ かつ $K/(L+K)\geq F(x)$ ならば，1個だけ取り替えるべきである．

(iv) $CE(T)>L+K$ で，残り計画期間が十分長ければ

$$L\lesseqgtr C\int_0^\infty (1-F(t)^2dt \text{ に応じて } \begin{Bmatrix}1\text{個}\\2\text{個}\end{Bmatrix}$$

ずつ取り替えるのが最適である．

（例）部品の寿命分布が指数分布 $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ のとき，ただし$N=2$ とする．最適政策は図4

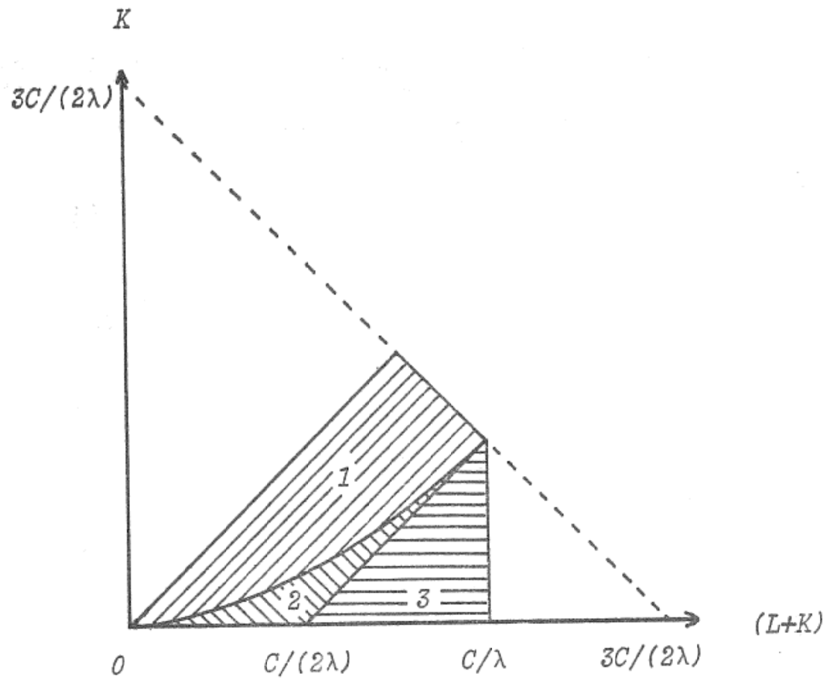


図 4

のような形をとる（図 4 参照）．

領域 1 では

$$\begin{cases} x \leq x_1^* & \text{ならば放置する} \\ x > x_1^* & \text{ならば1個だけ取り替える} \end{cases}$$

領域 2 では

$$\begin{cases} x \leq x_2^* & \text{ならば放置する} \\ x_2^* < x < x_{12}^* & \text{ならば2個とも取り替え} \\ x \geq x_{12} & \text{ならば1個だけ取り替える} \end{cases}$$

領域 3 では

$$\begin{cases} x \leq x_2^* & \text{ならば放置する} \\ x > x_2^* & \text{ならば2個とも取り替える} \end{cases}$$

が最適配分政策となる．ただし

$x_1^* = \log[\{1-\lambda(L+K)/C\}^{-1}]/\lambda$

$x_2^* = \log\,[\{2-\sqrt{1+2\lambda(L+2K)/C}\}^{-1}]/\lambda$

で，x_{12}^* は

$C(1-e^{-2\lambda x_{12}^*})/2\lambda - L - Ce^{-\lambda x_{12}^*}(x_{12}^* - x_1^*)$
$=0$ の根である．

4．おわりに

本稿では，システムの信頼性向上のために，予防保全および並列システムを経済的に運用させる数学モデルを与え，その解を導出した．従来の研究の多くは，計画期間を考慮せず，定性的に取り扱い，経済性を無視しているが，本稿のようなダイナミック・プログラミングの応用により，システムの信頼性を経済的に実現するための 1つの 理論的基礎を 作りうると 考えられる．

参 考 文 献

1）R. E. Barlow and F. Proschan : Mathematical Theory of Reliability, Wiley, New York (1965).

2）Y. Tabata : A Note on Idle Time Policy with Repair, J. Opns. Res. Soc, Japan Vol. 22 (1979).

3）T. Namekata, Y. Tabata, and T. Nishida : A Sequeutial Unit Allocation for Parallel Redundant System, J. Opns. Res. Soc, Japan Vol. 23 (1980).