研究ノート

常微分方程式系の解の安定性，有界性及び周期解について

山　本　　　　稔*

1．はじめに

近年，理学，工学，経済学その他種々の分野で微分方程式の定性的理論の研究が重要性を増してきている．これは，具体的な現象のモデル化によって現われる微分方程式の解の性質の究明の必要性とともに，19世紀末から20世紀初頭にかけて，E. Picard，J. Drach，E. Vessiot らによって，従来から使われてきた求積法で線形常微分方程式系が解けるための必要十分条件が与えられ，この方法で具体的に解を求められるような方程式は，ごく限られたわずかなものにすぎないことが示されたことにより，具体的に解を求めることなしに，解のもつ種々の性質を究明するための理論（定性的理論）の必要性が増してきたことによる．

一方，電子計算機の急速な発達に伴う近似解法の研究も非常な進歩をとげているが，これに対しても近似式の適用法についての種々な問題がおこっているようである．

本稿では前者の定性的理論のうち，解の安定性と有界性，周期解の存在に限って，線形系と非線形系２階，３階の方程式をとりあげてみたい．

2．線形常微分方程式系の安定性について

定係数線形常微分方程式系 $\boldsymbol{x}'=\mathrm{A}\boldsymbol{x}$ については，$n\times n$－行列 A の固有値がすべて負の実数部分をもつとき，そのすべての解 $\boldsymbol{x}(\mathrm{t})$は，$t\to\infty$ のとき **0** に指数位数で収束することがよく知られている．これを零解の（指数的）吸引性，（実は指数的漸近安定性）と呼んでいる．

これに引きかえ，変数係数の線形常微分方程式系，$\boldsymbol{x}'=A(t)\boldsymbol{x}$ については，たとえば

$$A(t)=\begin{pmatrix}-1 & e^{3t}\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

とするとき，その固有値は－１と－２とで，いずれも負であるが，方程式の一般解は

$$x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1e^{-t}+c_2e^{t}/2\\ c_2e^{-2t}\end{pmatrix}$$

で，$x_1(t)$ は $t\to+\infty$ のとき，e^t の指数位数で増加する．したがって定係数の場合とは全く異なる状況がおこっている．上の例では $A(t)$ は〔0，∞〕で非有界であるが，たとえ，A(t) を有界としても同様のことが起こることを1952年 R. E. Vinograd が例示した．この例では $A(t)$ は－1，－10を固有値とする周期行列であるにもかかわらず，e^{2t}，e^{-13t} の位数の解をもつことが示されている（(1)：143頁参照)．

同様な例は1960年に L. Markus-H. Yamabe によっても与えられ，その後多くの人々によって例が与えられた．しかし，これらの例がどのようにして作られ，その解がどのようにして得られたか明らかではなかった．

我々は，$\boldsymbol{x}'=\mathrm{A}(t)\boldsymbol{x}$ に，変換 $\boldsymbol{x}=exp(St)\boldsymbol{y}$（$S$ は n×n－定数行列）をほどこし，方程式が $\boldsymbol{y}'=B\boldsymbol{y}$ という定係数線形系に変形されるための必要十分条件を与え，Vinogrd 等によって与えられた多くの例が，この方法で直ちに作られ，また具体解も得られることを示し，また，同様の係数行列の固有値と安定性との関係を明らかにした（2)，(3)．

その後，「$P(t)$ を対称な半正定値，有界行列とするとき，線形系 $\boldsymbol{x}'=-P(t)\boldsymbol{x}$ の零解が一様漸近安定であるための必要十分条件は，ある実数 $a(>0)$ と b が存在し，P(t)が，すべての単位ベクトル $\boldsymbol{w}$ と，$t\geqq t_0\geqq 0$ に対し

*山本　稔（Minoru YAMAMOTO）大阪大学工学部，応用物理学科，教授，理学博士，関数解析学・関数方程式論

$$\int_{t_0}^{t} |P(s)w|\,ds \geqq a(t-t_0)+b$$

をみたすことである。」という美しい結果が，A. P. Morgan と K. S Narendra によって得られている（4）.

3．3階非線形常微分方程式について

理工学にはしばしば非線微分方程式が現われる．3階の非線形方程式は，ロケットの姿勢制御等多くの実際面での必要性からソビエトを中心に1940年代から研究され，また真空管回路の方程式等多くのモデルをもつことから欧米でも広く研究されてきた．初期は自励系に焦点がしぼられていたが，周波数変調をもつ回路等を考える場合，非自励系をも考える必要が生じた．K. E. Swick らは3階の非線形方程式

$$x''' + p(t)x'' + q(t)g(x') + r(t)h(x) = e(t)$$

のすべての解とその2階までの導関数が $t \to \infty$ のとき0に収束するための十分条件を，吉沢太郎氏の半不変集合理論を用いて求め，つづいて M. Harrow，J. O. C Ezeilo，H. O. Tejumola 等はもう少し広い方程式

$$x''' + f(t, x', x'')x'' + g(x, x') + h(x) = p(t, x, x', x'')$$

の解について同様のことを研究している．

われわれはこれらの結果をより広い形の方程式

$$x''' + \psi(t, x, x', x'') + \phi(t, x, x') + c(t)f(x) = p(t, x, x', x'')$$

に対し，半不変集合の理論を用い（5），つづいて，リヤプノフ関数に対するある種の比較定理を用いて導いた（6）.

3階の方程式についてはその後，周期解の存在が主たる目的となってきており，R. Reissig, Ezeilo, Tejumola 等を中心に研究が進められている．

4．2階非線形常微分方程式について

ファン，デル，ポルの方程式，その一般化としてのリエナール方程式の研究に端を発する，2階非線形常微分方程式は Reuter (1951), Utz ('56), Antosiewicz ('55), Burton ('65), Wong ('66), Lalli ('69), Zarghame-Mehri ('70), Chang ('65), Burton-Grimmer ('70), Burton ('70), Graef ('71, 72), Heidel ('72) Graef-Spikes ('75～'78) 等多くの人々により非自励の場合に広げられて詳細な研究がなされてきた．扱われる方程式は

$$(a(t)x')' + b(t)f_1(x)g_1(x')x' + c(t)f_2(x)g_2(x') = e(t, x, x')$$

で，解およびその導関数の有界性，0への収束性，解の振動性が主たる研究課題となっている．$a(t)$ に課する条件をより弱め，摂動項に関する条件をも弱めて，上述の論文と同じ結論を得たものが（7）である．また（8）で筆者の共同研究者 Sakata は，La Salle の不変原理を拡張し，リヤプノフ関数に工夫を加えて

$$x'' + b(t)f_1(x)g_1(x')x' + c(t)f_2(x)g_2(x') = e(t, x, x')$$

の解およびその導関数の一様有界性，吸引性を得，さらにある自然な仮定の下で，解の一様有界性のための必要十分条件を与えた．これが更に零解が大域的一様吸引的であるための必要十分条件であることをも示した．

リエナール方程式については，なお解の延長可能性，周期解についての研究が活発に続けられている．

おわりに

現在，当研究室では，写像度論，不動点定理を用いた周期解の存在に関する研究が進められている．リヤプノフの方法と組み合わせて良い結果が得られるよう努力を重ねたい．

参考文献

1）山本稔：常微分方程式の安定性（実教出版）
2）M. Yamamoto：Proc, Japan Acad. Vol 53 (1977)
3）Y. Okuno–M. Yamamoto：同上
4）A. P. Morgan–K. S. Narendra：SIAM. J. Control and Optimizaton. Vol. 15. (1977)
5）M. Yamamoto：Proc. Japan Acad. Vol. 47 (1971)
6）M. Yamamoto：Proc. Japan Acad. Vol. 49 (1973)
7）M. Yamamoto–S. Sakata：Math. Japonica. Vol. 27. (1982)
8）S. Sakata：Thesis (Fuculty of Engineering Science, Osaka Univ.) (1982).