高い分解能をもつ２次元スペクトル解析法

木　村　英　紀*

研究ノート

は　し　が　き

確率過程又は時系列は時間というひとつのパラメータに依存する１次元の確率現象である．これに対し，時間と空間など２つ以上のパラメータに依存する確率現象を多次元の「確率場」（random field）とよぶ．時系列の場合と同様確率場に対してもその周波数特性を表現するものとしてパワースペクトラムが定義される．確率場に対する有限の観測データからパワースペクトラムを推定するスペクトル解析は，画像処理やレーダ，ソナーの信号処理など各方面で急速にその重要性が高まっている．

時系列のスペクトル解析は古いテーマであるが，最近のディジタル信号処理の発展とともに長足の進歩をとげた．特に70年代のはじめに提案された「最大エントロピー法」はスペクトル解析の考え方を根本から変えた画期的な方法であり，分解能の向上やアルゴリズムの簡略化に大きく寄与した．一方多次元確率場のスペクトル解析は一次元の場合の単純な拡張としてはとらえられない幾つかの理論的な困難があり，すっきりした有効な手法が確立されているとはいい難い．一次元の場合に成功した最大エントロピー法も多次元の場合はきわめて複雑な非線形の最小化問題となってしまい，それを解くには強引な繰返し計算にたよらざるを得ないのが現状である．

以下では上記のような困難を回避した２次元確率場のスペクトル解析のひとつの方法を述べる[1]．この方法は２次元のスペクトル解析を，多チャンネル時系列のスペクトル解析とスカラ複素時系列のスペクトル解析の組みあわせとしてとらえ，２つの一次元問題に分解しそれぞれに最大エントロピー法を適用することによって，高い分解能とアルゴリズムの簡略化をはかったものである．この方法で得られたパワースペクトラムの推定は近似的にエントロピーを最小にしており，「共分散適合条件」も満足している．

*木村英紀（Hidenori KIMURA），大阪大学工学部，電子制御機械工学科，助教授，制御工学

アルゴリズムの概略

２次元確率場を $\{x(t,s)\}, (t,s=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots)$ であらわす．一般性を失うことなく平均は０と仮定する．共分散を

$$r(l,k)=E[x(t+l,s+k)x(t,s)]$$

とおくと（Ｅは期待値をあらわす），パワースペクトラムは共分散の２次元フーリェ変換

$$P(\omega_1,\omega_2)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}r(l,k)e^{-j(\omega_1 l+\omega_2 k)}$$

で与えられる．有限個の格子点領域

$$\Omega=\{(l,k);\ |l|\leq L,\ |k|\leq K\}$$

で $r(l,k)$ が測定されたとき，それにもとづいて $P(\omega_1,\omega_2)$ の推定 $\hat{P}(\omega_1,\omega_2)$ をもとめることが，スペクトル解析の問題である．その際，推定されたパワースペクトラムをもつ確率場の共分散が，測定された共分散と一致することがデータの正しい利用という点からも望ましい．これを式で表現すると

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{P}(\omega_1,\omega_2)e^{j(\omega_1 l+\omega_2 k)}d\omega_1 d\omega_2 = r(l,k),\quad (l,k)\subset\Omega. \tag{1}$$

となる．これが共分散適合条件とよばれており，最大エントロピー推定はこれを満足している．

ここで $\{r(l,k)\}$ の l に関するフーリェ変換を

$$\pi(\omega_1,k)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}r(l,k)e^{-j\omega_1 l} \tag{2}$$

とおく，これを用いるとパワースペクトラムは $\pi(\omega_1,k)$ のフーリェ変換を各 ω_1 に対して行

った

$$P(\omega_1,\omega_2)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi(\omega_1,k)e^{-j\omega_1 k} \qquad (3)$$

で与えられる．(2)式と(3)式の表現は次のような$\underline{P}(\omega_1,\omega_2)$の推定を示唆する．まず$\Omega$上の$r(l,k)$の値から(2)式の$\pi(\omega_1,k)$の推定値$\hat{\pi}(\omega_1,k)$をもとめる．これは各kに対する1次元のスペクトル推定の問題である．得られた$\hat{\pi}(\omega_1,k_2)$を$\pi(\omega_1,k)$の代りに用いて(3)式の$\underline{P}(\omega_1,\omega_2)$の推定$\hat{P}(\omega_1,\omega_2)$をもとめる．今度は各$\omega_1$に対する1次元のスペクトル推定の問題である．このように$P(\omega_1,\omega_2)$の推定が2段階の1次元スペクトル推定の問題に帰着される．

(2)式の$\pi(\omega_1,k)$は(K＋1)チャネルのベクトル時系列

$$X(t)=[x(t,0),\ x(t,1),\cdots,\ x(t,K)]$$

のパワースペクトラム行列$\Pi(\omega_1)$と関係

$$\Pi(\omega_1)=\begin{bmatrix}\pi(\omega_1,0), & \pi(\omega_1,-1)\cdots & \pi(\omega_1,-K)\\ \pi(\omega_1,1), & \pi(\omega_1,\ 0)\cdots & \\ \cdots\cdots & & \\ \pi(\omega_1,K), & \pi(\omega_1,K-1)\cdots & \pi(\omega_1,0)\end{bmatrix}$$

で結ばれている．従って何らかの方法で$\Pi(\omega_1)$の推定$\hat{\Pi}(\omega_1)$をもとめれば，その要素として推定$\hat{\pi}(\omega_1,k),|k|\leqq K$,が同時にもとめられることになる．$\Pi(\omega_1)$として$X(t)$の多チャンネル最大エントロピー推定を用いると高い分解能が得られるし，「レビンソンアルゴリズム」を用いれば計算は簡単である．

次の段階は得られた推定$\{\hat{\pi}(\omega_1,k)\},|k|\leqq K$，をもとに最終的な推定

$$\hat{P}(\omega_1,\omega_2)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{\pi}(\omega_1,k)e^{-j\omega_2 k}$$

をもとめることであるが，$\pi(\omega_1,k)$を周波数ω_1に依存した一種の共分散と考えると，これは各ω_1に対するパワースペクトラムの推定問題であり，従って再び最大エントロピー法を適用することができる．ただし$\hat{\pi}(\omega_1,k)$は一般に複素数なので，計算アルゴリズムにそのことの配慮が必要となる．

シミュレーションと検討

共分散系列が

$$r(l,k)=\sigma^2\delta(k,l)+\sum_{i=1}^{M}a_i^2\cos(2\pi f_{i1}l+2\pi f_{i2}k)$$

で与えられる確率場に対するスペクトル解析を行った結果を示す．この確率場はパワーσ^2の背景白色雑音と周波数(fi_1, fi_2)にある大きさai^2の線スペクトルからなるパワースペクトラムをもつ．図1，図2は表1に示すパラメータに対する推定結果である．近接した2つの線スペクトルを完全に検出していることが分る．

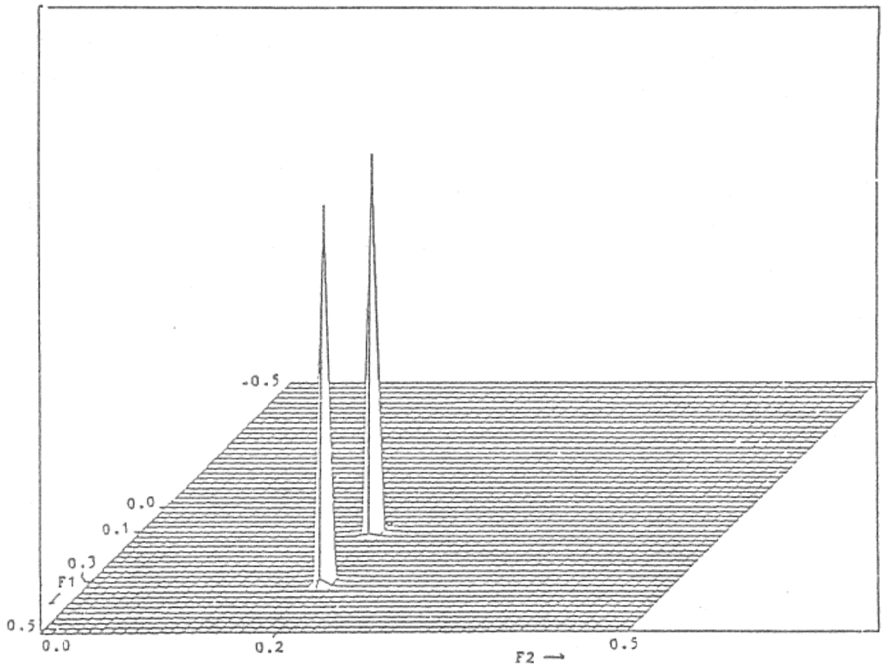

図1　2次元スペクトル解析の例

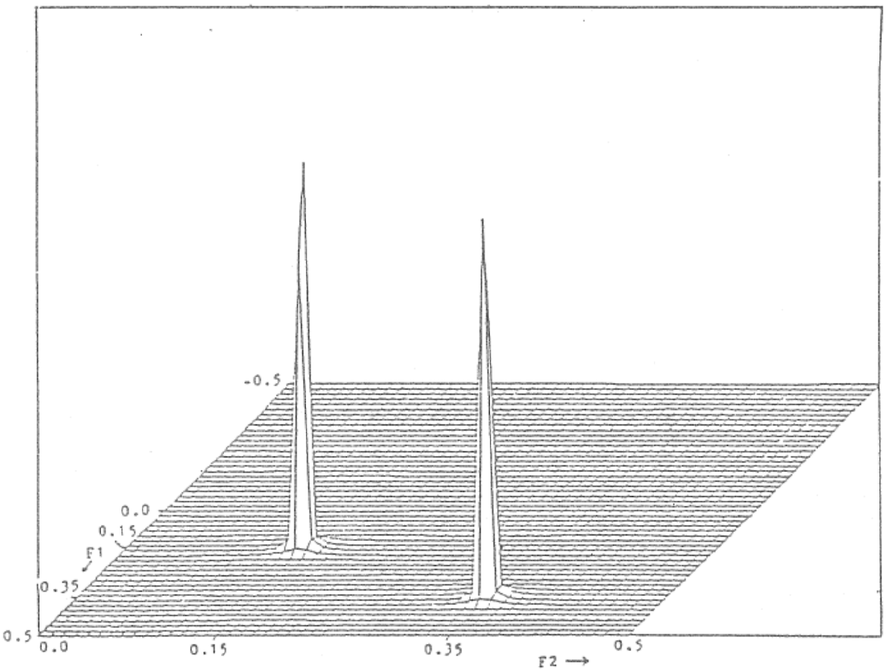

図2　2次元スペクトル解析の例

2次元の最大エントロピー推定をもとめるアルゴリズムとしてよく知られているものに文献〔2〕の方法がある．この方法による推定と我々の方法とを比較したのが図3である．パラメータは表1に示されている．a）図は文献〔2〕に示された等高線による計算結果である．b) c)図は我々の方法で計算した結果で，比較のために等高線で表現してある．b）図は領域Ωを L＝K＝3としたもので，a）図より分解能は劣っている．c）図はL＝K＝4としたもので，今度はa）図より優れた分解能を示している．

表1　例題のパラメータ

図	M	σ^2	σ_i^2	(f_{i1},	f_{i2})
1	2	1.0	1.0	0.3	0.2
			1.0	0.1	0.2
2	2	1.0	1.0	0.15	0.15
			1.0	0.35	0.35
3	3	6.0	1.0	0.1	0.1
			1.0	0.3	0.1
			1.0	0.2	0.2

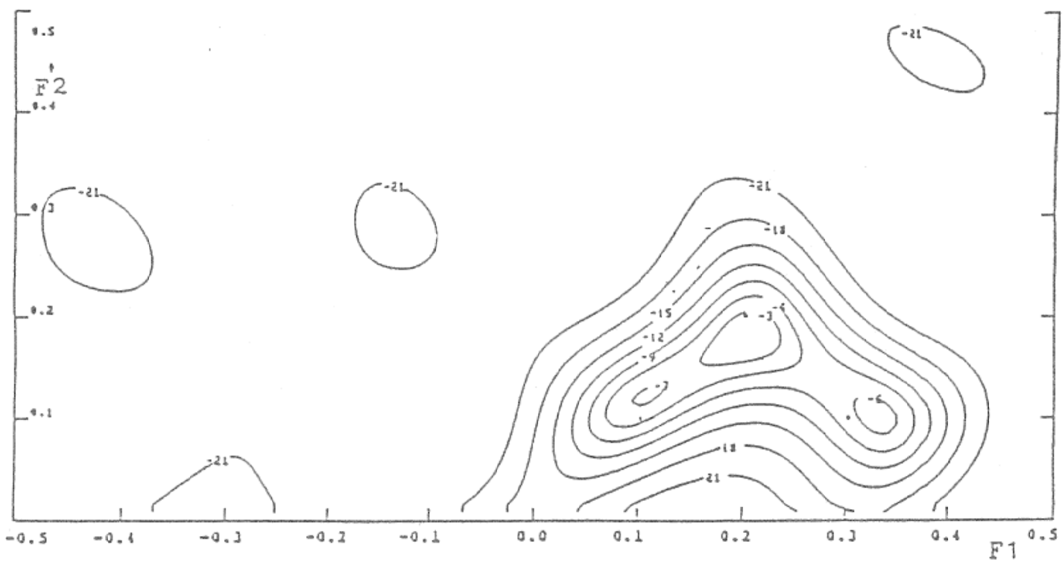

図3　a) Lin-Malikの方法

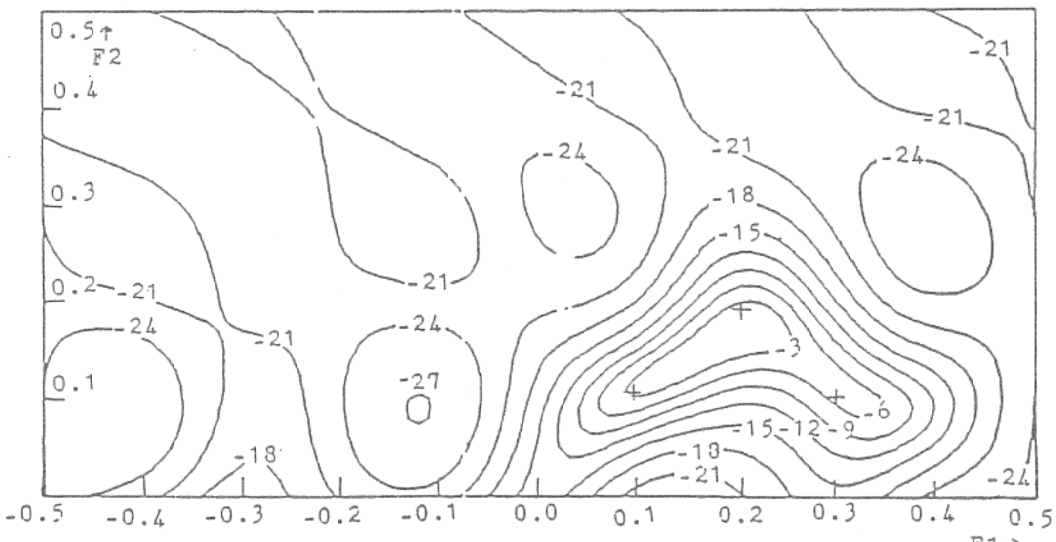

図3　b）我々の方法（L＝K＝3）

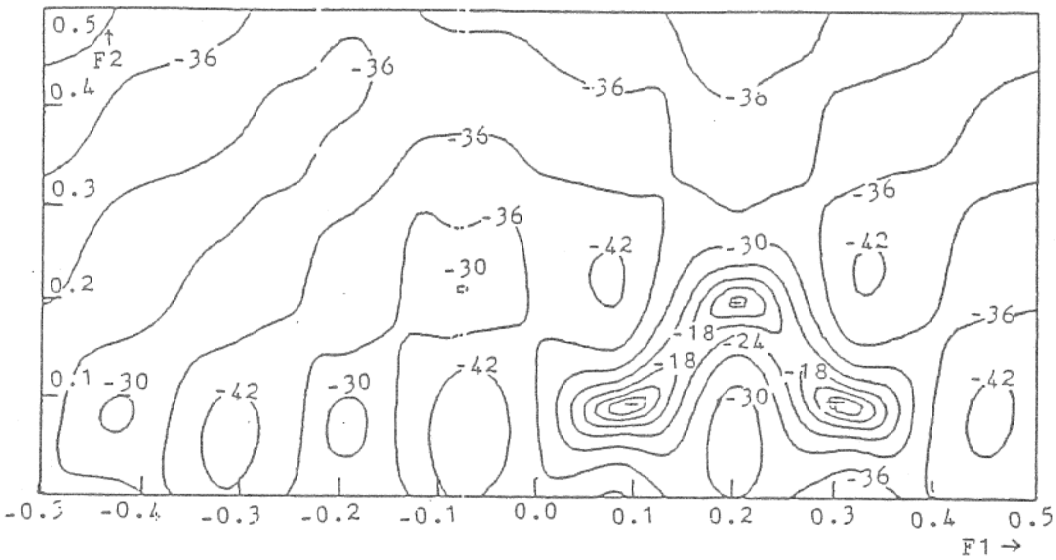

図3　c）我々の方法（L＝K＝4）

我々の方法は幾つかの優れた性質をもつことが理論的にも示される．たとえば(1)式であらわされる共分散適合条件も満足している．詳しくは文献〔1〕を参照されたい．

む　す　び

本稿の方法は本来非線形である2次元の最大エントロピー推定を，2段階の一次元問題に分解することにより「線形化」したものである．この方法による推定が真のエントロピー推定と変らない分解能をもち，アルゴリズムも簡単であることが示された．研究を完結するには真の最大エントロピー推定からのへだたりを定量化する誤差解析が必要であるが，これは今後の課題である．

参　考　文　献

〔1〕H.Kimura and Y.Honoki, "A hybrid approach to high resolution two-dimensional spectrum analysis," IEEE Trans. on Acoust. Speech, Signal Processing, vol. ASSP-35, no.7, pp. 1024-1037, 1987.

〔2〕L.S. Lim and N.A. Malik, "A new algorithm for two-dimensional maximum entropy spectrum estimation," IEEE Trans. on Aconst. Speech, Signal Processing, vol. ASSP-29, no. 6, pp. 401-413, 1981.