フーリエ級数研究の系譜をたどって

随　　筆

佐　藤　俊　輔*

A short story on the Fourier series

Key Words：Fourier series, convergence problem

【はじめに】

フーリエ級数の歴史は周期的な現象の三角関数による表現から出発した。フーリエ（1768－1830）が原点とされる。ジャン・バティスト・ジョセフ・フーリエは1768年3月21日フランスのオセールで仕立て屋の息子として生まれた。フーリエについての読み応えのある伝記がある [4]。彼の生きた時代はフランス革命（1789－1794）やナポレオン（1769－1821）のそれに重なる。この時代のフランスの人々と同様，フーリエも自国に起こった大きな社会の変革とそれに伴う社会の混乱によって翻弄された。

フーリエの生まれる1世紀前は，ニュートン（1643－1727）がケプラーやガリレオそしてデカルトらの所産をうけつぎ，微分学や積分学を発見しそしてそれを駆使して動力学や天体力学を打ち立て，その後，ベルヌーイ一族，オイラー，ダランベールなど近世数学史上の巨人達が「力」の係る物理現象の数学的側面，数理物理学の構築にたずさわった時代である。若きフーリエは，ベル [4] によれば，ニュートンやパスカルが自分と同年齢の頃（それは1世紀以上も前のことになるが）すでに得ていた名声をまだ手にしていなかった。彼は1804年，熱伝導の問題に着手し，フーリエの法則を見出した。それをもとに有限長の熱伝導体での熱の分布を表わす熱伝導方程式と呼ばれる拡散型の偏微分方程式を導き，導体内の熱の振る舞いについて論文を書いた。この方程式を解くには導体の2つの端点における境界条件と導体の長さ方向に沿う初期条件が設定されていなければならない。これらの条件にかなう解を求めるのが課題である。1807年フーリエはフランス学士院に熱伝導についての論文を提出した。曲折はあったがこの論文は有望とみなされ，1812年フランス学士院は熱拡散の数理理論に関する懸賞問題をだした。彼は1807年の改定版を提出し，賞を勝ち得た。審査員はラプラス，ラグランジュ，およびルジャンドルであった。彼らはフーリエの研究の新奇さと重要性は認めつつも数学的な取扱いに欠陥があり正確さに欠けていると指摘した。そこで彼は研究の第3版を本の形でまとめ，1822年に「熱の解析的理論(Théorie analytique de la chaleur)」として出版した。これは600ページを越す大作であったという [4]。フーリエの扱った熱伝導方程式は初期条件と境界条件を与えて解ける。この場合熱伝導体と同じ長さの区間で定義された関数をあつかわねばならない。このような関数を扱うためにフーリエはそれを三角級数で表現したのである。

【当時の状況】

古代の人たちは測量術とかかわって円周率を求めようとしたが，古代ギリシャでは太陽と月の運行を知るために円弧と弦の関係がしらべられた。円周角を360度とする度数法は古代バビロニアで考案され，これはいまでもふつうに使われている。角というと三角形の角を思い出すがこれは静止している角であって，天球上の太陽の動きは円周上の動点がつくる角としてとらえられる。BC2世紀のギリシャではすでに，そのほかバビロニアやインドでも「弦の表」がつくられていたと言われる [2]。科学では角度は孤度法で測る。孤度法では円周上を動いた距離と半

*Shunsuke SATO
1941年3月生
東京大学大学院　工学系研究科　応用物理学専攻修了（1943年）
現在、学校法人 藍野学院 藍野大学　医療保健学部　教授，大阪大学名誉教授
工学博士　生物工学
TEL：072-626-1711
FAX：072-627-1753
E-mail：s-sato@pt-u.aino.ac.jp

径との比で中心角を測る。したがって円周角は2πで，角度は無次元数となる（単位はラジアン）。すると角度θに対する$\sin\theta$は普通の関数とみなせる。三角法で孤度法を使うことの利点は微積分でははかりしれない。度数法では煩雑になりすぎる。

正弦や余弦をsinやcosで表すこと，複素数の概念はすでに存在していたし，$\sqrt{-1}$を表わす記号i，円周率記号π，自然対数とその底（eで表す），関数を$f(x)$で表す表記法，和記号，微積分や偏微分記号，オイラーの公式，関数のベキ級数展開，種々の物理現象の動的振る舞いを記述する微分方程式や偏微分方程式はフーリエの時代には周知であった。幾何学の問題を解くのに座標系を用いたのはデカルト（1596－1650）だから，単位円周上を等速円運動する点のx, y軸への射影としての三角関数の概念もあっただろう。

ところで「無限」という概念はいつ人類が手にしたのか。これは意外に古く無理数の概念を手にした頃，すなわち，ピタゴラス（BC572－BC492?）の時代であったという[2]。例えば正方形の対角の長さは辺の長さの$\sqrt{2}$倍であり，$\sqrt{2}$は小数点以下が無限に続く数として表わされることが知られていた。循環小数などと異なりその素性は誰にも分からない。大きく時代は下るが，ガリレイ（1564－1642）の頃には無限の概念は少なくとも数学者の間には定着していた。実際，無限をあらわす記号∞はウォリス（Wallis, 1655）が無限算術に使っていたという。「無限」の集合論的意味はカントール（1845－1918）やゲーデル（1906－1978）を待たねばならないが，級数の収束で使う無限は個数の無限でよい。収束の概念はどうだろうか。フーリエの時代の関数のベキ級数展開の収束は点ごとの収束であった。しかし，収束するかどうか不明の三角級数に$f(t)$を掛けて周期Tで積分することで係数を求めるというやり方なので，「おおらか」（森毅）な時代であったという。

境界値問題を三角関数の級数を使って解くアイディアもすでにあったようだ。ダランベール（1717－1783）はバイオリンの弦（長さ１とする）の振動を扱った。時刻$t \geq 0$と位置xの関数としての弦の変位$u(t, x)$は波動方程式に従う。この解は弦の両端での変位を定める境界条件（$u(t, 0)=u(t, 1)=0$とする）と，弦の長さ方向の初期の変位とその速度を与えることで解ける。それによって方程式の解は弦の両端では$u=0$となり互いに反対方向に速度１で動く２つの波の重ねあわせ，ダランベールの公式：$u(t,x)=(1/2)[f(x+t)+f(x-t)]$，として与えられる。ここで，$f$は境界条件と初期条件から決まる周期２の奇関数である。オイラー（1707－1783）は，関数fは周期２の正弦関数の級数に展開できると述べた（1748）。ダニエル・ベルヌーイ（1753）とラグランジュ（1759）は同じアイディアを互いに批判しながら前進させた。正弦級数の係数を計算する処方箋はオイラー（1777）が与えた[5]。

$$(1)\quad \hat{f}(n)=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx$$

これを係数とする三角級数には後にフーリエの名前が冠せられる。

【フーリエの命題と解決】

フーリエの寄与は1807年の熱伝導方程式に関する論文に始まることはすでに述べた。この研究でフーリエは，「任意関数を有限区間で三角関数の無限級数で表現する」という可能性を主張し，熱伝導の問題で扱う簡単な関数について証明を与えた。後にフーリエはこの命題が，彼自身は厳密な証明は与えなかったが，簡単な関数ばかりでなく任意の関数に対して成り立つと言って憚らなかった。フーリエのこの考え方を，今日的に言えば，「時間に関する任意の周期関数fは同じ周期Tのsineとcosineの三角関数の無限級数の和として表せる」というものである。

$$(2)\ f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}[\,a_n\cos(2n\pi t/T)+b_n\sin(2n\pi t/T)\,],$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos 2\pi nt/T\,dt,$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin 2\pi nt/T\,dt$$

$T=1$であってもなんら一般性を失わないし，変数は時間tでなくて空間変数xであってもよい。以後，この命題の精密化や成立のための条件の探求を巡って多くの数学者が登場する。

17世紀には関数を表すのにベキ級数展開が使えることが知られていた。例えば，単位円周の弧長すなわち角度$2x$に対する半弦の長さyは，$y=\sin x$で与えられるが，そのベキ級数展開はニュートンがすでに一般的な２項展開$(a+b)^{\alpha}$を利用して予想して

いたし，e^x や $\log(1+x)$ などのベキ級数も知られていた [2]。この場合注意すべき点は2つある。ひとつは，ベキ級数展開は $|x|<1$ でのみ有効であり，もう一つは，$\{x^n\}$ は今風にいえば直交系を構成していないので，各 x^n が y の値にどのように寄与しているか分からないということである。その限りでは，フーリエの級数表示は区間（周期）での直交関数系での展開を予想させるものであり，フーリエの勘の鋭さを示すような気がしてならない。ともあれ，フーリエの命題については，「各点」収束，「一様」収束，「概」収束，「ノルム」収束のための関数 f に課せられる必要条件，そして，有限区間でのフーリエ級数の問題から無限区間でのフーリエ積分の問題へと進展する。さらに収束する三角級数に対応する関数 f の存在も問題となる。フーリエ係数が求められるためには，関数は区間（周期）で積分が可能でなければならない。そうでない関数は除外される。事実，扱える関数のクラスを広げるために大学初年次に習うコーシー風の積分から，リーマン積分，ルベーグ積分が登場した。ただし歴史は関数の可積分性ではなくて，関数の区間における振る舞いのほうから出発した。もし関数に不連続点があると，その点でフーリエ級数は収束するのかしないのか，収束するとすればどんな値に収束するのか。関数 $f(x)$ をフーリエ級数で表わすことの厳密な証明を始めて与えたのはディリクレ（1829）である。ディリクレは $f(x)$ の展開区間におけるフーリエ級数の和は $f(x)$ が有限個の通常の不連続をもつときに限って有限であることを示した。ところで収束の必要条件は，n 次の係数が n とともに0に近づくことである。ハミルトン（1843）はフーリエ級数の収束の議論で，もし f が区間 $[a,b]$ で連続ならば，

(3)　$$\int_a^b f(x)\sin nx dx \to 0 \qquad n\to\infty$$

であることを示した [5]。

リーマン（1826－1866）はコーシーが与えた連続関数の積分の定義を一般化し，今日リーマン積分と呼ばれるものを導入した。フーリエ級数の収束の議論が“積分”の概念を拡張する誘因となった。積分の概念の画期的な拡張がルベーグ（1902）によってなされた。さらに関数空間の概念が導入され，それに含まれる関数間の距離が定義され，収束の概念がより明確になった。

ハミルトンの結果 (3) はリーマンとルベーグ（1875－1941）によって連続関数から可積分関数に拡張され，いまではリーマンールベーグの補題として知られている。ハミルトンの寄与は忘れられた [3]。この補題から，ある関数のフーリエ級数のある点での収束性はこの点のごく近傍の狭い区間における関数の振る舞いにのみ依存することが導かれる。それを用いてディニ（1880）やジョルダン（1881）は収束の判定条件を与えた。応用上はこれらの収束条件で十分である。フェエール（Fejér, 1904）はフーリエ級数の部分和 $\overline{s}_N(x)$ の収束を考えることで，状況は大きく単純化されることを示した。すなわち，f がルベーグ可積分ならば，ゼロ集合の点をのぞいてすべての点 x で $\overline{s}_N(x)\to f(x)$ である。さらに f が点 x で連続ならば，$\overline{s}_N(x)\to f(x)$。さらに f がいたるところで連続ならば，収束は一様である。フェエールはこのようにしてワイヤストラスの定理（1885）「周期 2π の連続な周期関数は三角多項式 $\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ で一様に近似できる」の単純な証明を得た [1,5]。

ドラバレ・プサン（De la Vallee Poussin, 1893）はフーリエ級数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ をもつリーマン可積分関数 f に対して

(4)　$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

を示した。これは通常パーセバルの等式と呼ばれる。歴史的な視点にたてば等式の名称はピタゴラスに帰すこともできる [5]。

$L^2=L^2[0,2\pi]$ をルベーグの意味で2乗可積分な関数の全体とする。フリジェシュ・リース（1907, Frigyes Riesz, 1880－1956）とフィッシャー（1907）は独立にパーセバルの式の逆を見出した。「級数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$ が収束するような複素数の任意の列 $\{c_n\}$ に対して，式 (4) が成立するようなフーリエ級数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ をもつ L^2 の関数 f が存在する。」フィッシャーはルベーグ積分の枠組みでこれがより一般的な結果の系であることも示した。「$\{f_n\}$ を $L^2=L^2[a,b]$ の関数列とし，$\lim_{m,n\to\infty}\int_a^b|f_m(x)-f_n(x)|^2\,dx=0$ とする（コーシーの収束条件）。このとき，L^2 の関数 f が存在して $\lim_{n\to\infty}\int_a^b|f_n(x)-f(x)|^2\,dx=0$ となる。」

ところがフーリエ級数が収束しない例も数多く知られている。デュボアレイモン（Du Bois Reymond, 1876）はフーリエ級数が1点で発散するフーリエ

級数をもつ連続関数の存在を示し，連続関数のフーリエ級数が概収束するかという問題を提起した。コルモゴロフ（1926）はフーリエ級数がいたるところで発散するルベーグ可積分関数の例を与えた [1]。

カールソン（Carleson, 1966）は $L^2[0,2\pi]$ 空間の関数 f のフーリエ級数が概収束することを示し，収束に係わる長年の問題に事実上（少なくとも筆者の知識では）終止符を打ったように見える。フーリエ級数の収束に係る難関は , フーリエの時代に克服できる性質のものではなく事実満足できる解決に達するには一世紀半もかかったのである [2]。

【フーリエ積分】

再び時代を遡って周期関数のフーリエ級数は当初はオイラーやラグランジュの研究対象であった。定義域が（$-\infty,\infty$）の関数のフーリエ積分による表示はフーリエ自身のものである。彼は級数からの極限手続きでそれを得た。その方法はいまの教科書に見られるものと同じである。

(5)　$$\hat{f}(\gamma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\gamma x}dx,\qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\gamma)e^{i\gamma x}d\gamma$$

フーリエ積分による表示はフーリエ級数の収束に対するものと類似した条件のもとで成り立つ。パーセバルの式の類似物は，プランシュラル（Plancherel, 1910）による。f が $L^2=L^2(-\infty,\infty)$ に属するとする。(5) で積分範囲を $[-n,n]$ して得られる列 $\{\hat{f}_n(\gamma)\}$ と $\{f_n(x)\}$ は前者がある関数 $\hat{f}$ に収束し，後者は f に収束し（ともに L^2 のノルムで）$\|\hat{f}\|^2=\|f\|^2$ となるというものである。パーセバルの式やプランシュラルの式は工学の信号処理の教科書にも盛んに現れる。

フーリエ積分は興味ある性質をもつ。$L^1=L^1(-\infty,\infty)$ を区間 $(-\infty,\infty)$ で（ルベーグ）可積分な複素数値関数の集合とする。L^1 の任意の関数 f に対して，フーリエ変換 $\hat{f}$ が定義され連続関数である。変換 $f\to\hat{f}$ は線形である。すなわち，$f+g$ の変換は $\hat{f}+\hat{g}$ であり，任意の複素数 c に対して cf の変換は $c\hat{f}$ である。再び，f と g が L^1 の関数ならば，畳み込み

(6)　$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dy$$

も L^1 の関数で，$f*g$ のフーリエ変換は普通の積 $\hat{f}\hat{g}$ となる（チェビシェフ（1890））。さらに，$f(x+a)$ の変換は $e^{ia\gamma}\hat{f}$ であり，導関数 $f'(x)$ が L^1 に属するならば，その変換は $i\gamma\hat{f}$ となる。最後の性質は，微分方程式の解法に応用される。

【応用など】

フーリエ級数やフーリエ積分は，現在の科学技術のいたるところで応用され有用な結果を与えている。ボーア（Harald A Bohr）による概周期関数に対するフーリエ級数の理論（1924-26），ボッホナーの定理（1932）によるフーリエ積分の確率論への応用，数理物理学の多くの問題に現れる積分方程式の求解への応用，ポアソンの和公式（1823），ヤコビの $\vartheta(t)$ 関数についての等式，シャノンのサンプリング定理をはじめとする信号理論への応用（たとえば有限時間信号と有限帯域信号についての議論 [9]），フェエールーリースによる定理（1916）やセゲ（Szegö）の拡張（1921），ペーリーーウイナーの定理（1934）などの線形システムの設計や定常過程の予測の問題への応用 [6] など枚挙にいとまがない。さらに，ラドン変換とＸ線ＣＴ，時間周波数解析，白色ガウスノイズに駆動される系の出力である非線形ノイズのウイナーーエルミート展開，もフーリエ級数の延長上にあって信号理論に係る大きな話題である。$1/f$ ゆらぎ（f は周波数）をもつ現象が半導体や生命体で観測されるという報告があり，その生成機構が課題になっている。武者ら [8] は調和振動子の結合系で $1/f$ ノイズが生成されることを示している。文献は手元にあるが力不足でまだ読めない。

＊＊＊

ベルの読み物 [4] には「フーリエは 1830 年 5 月 16 日，63 歳のときに心臓病で死んだ。フーリエは，その仕事が非常に基本的なものであったため，その名がどの文明国でも形容詞になっているほど，選ばれた数学者の一人である」と結ばれている。

【おわりに】

スペクトル解析は信号処理の中心的課題の一つで，信号を種々の周波数成分に分解して表現する方法にかかわっている。筆者は基礎工学部生物工学科在職中，信号解析の講義を担当していたこともあり，その背景となるスペクトル解析の研究の歴史をその時代の知識にしたがって追ってみたいという願望があ

った。基礎工学部在職中に研究室の大学院生とのゼミであるいは畏友小林欣吾氏とフーリエ級数にかかわる本を読んだ思い出もある。本稿はこれらの本のうち [1][6][7] と，数学と数学者についての啓発書 [2-4] に基づいて随筆風にまとめてみたものであるが，書き始めてすぐに後悔をした。手元の本や教科書ではいずれも古典の問題が現代風に焼き直して記載されているからで，また，フーリエ級数研究の歴史は数学の歴史にも密着しており私の能力でまとめられるものではないと悟ったからである。つまり，時代の知識にしたがって追ってみるという願望は無謀であることに気づいたのである。ともあれ，拙稿を読んでいただける方がおられれば種々お叱りをうけ将来のチャレンジの糧としたい。

参考文献

[1] 河田龍夫：Fourier 解析 . 第４刷，産業図書，昭和 55 年

[2] 志賀浩二：無限の中の数学 . 第５刷，岩波新書，2008

[3] Aczel AD: The Mystery of the Aleph. Four Walls Eight Windows, Inc., New York, 2000（アミール D アクゼル（青木薫　訳）:「無限」に魅入られた天才数学者たち，早川書房，2005）

[4] Bell ET: Men of mathematics. Simon and Schuster, New York, 1937（ET ベル（田中，銀林 訳）: 数学をつくった人びとⅠ，早川書房，2003）

[5] Coppel WAJB : Fourier- On the occasion of his two hundredth birthday. Amer Math Monthly, 76,468-483(1969)

[6] Dym H, HP McKean:Fourier Series and Integrals. AP, 1972

[7] Grenander U and G Szegö　Toeplitz Forms and Their Applications. Univ. California Press, Berkeley,1958

[8] Musha T and M Tacano: Dynamics of energy partition among coupled harmonic oscillators in equilibrium. Physica A 346,339-346(2005)

[9] Pollack HO and D Slepian : Prolate spherical wave functions, Fourier analysis and uncertainty (1). Bell System Tech. J.40,43-64(1961) をはじめとする同名の論文