生産と技術　第62巻　第３号（2010）

グラフの列挙問題

研究ノート

柏　原　敏　伸*

Generation Problems on Graphs

Key Words：graph algorithm generation enumeration

１ まえがき

ある種の節約を満たす構造を重複なく全て出力せよという問題を列挙問題という．古くから研究されており，計算機の計算速度や記憶容量の増大に伴って近年は具体的な実用を視野に入れた研究もなされている．一般に、最適問題が少量の入力データをもとに少量の出力データを，信号処理が多量の入力データをもとに多量の出力データを得るのに対して，列挙問題は少量の入力データをもとに多量の出力データを作り出すことになる．「重複なく全て」という条件は出力データの利用者がそのことを確認することが困難であるほど出力データが多量であると想定していることによっている．

列挙問題の解法アルゴリズムが出力したデータを利用者が受け取るとき通信が発生していると考えると，利用者の便益と通信量の関係に興味が湧く，高効率な列挙アルゴリズムが存在するような問題はそのまま利用者に送り，列挙自体は利用者が行えばよい．そうでない問題は高効率な列挙アルゴリズムが存在するような問題に置き換えてそれを利用者に送る，といった方法が採用できると有用である．このためには高効率な列挙アルゴリズムが存在するような問題を多数見つけておく必要がある．以下，単純な例を示す．

*Toshinobu KASHIWABARA
1947年2月生
大阪大学 基礎工学研究科 物理系専攻（1974年）
現在、工学博士　情報工学
TEL：072-738-6635
E-mail：kashi@ist.osaka-u.ac.jp

２ 道の列挙

非循環グラフ（有向閉路を持たない有向グラフ）とその２頂点s，tが与えられ，sからtへの有向道（st道という）を列挙するという問題を考える．

sからtへ後戻り法により辺と頂点を辿ることで列挙ができることは容易にわかる．また，前もってst道の上に乗れないような頂点と辺を削除しておくことにより，辿った辺が無駄になることがなくなり，全体の手間が$O(f(|E|)+M)$となることもわかる．ここでEはグラフの辺集合，$f(\cdot)$はある多項式，Mは出力されるデータの総量である．

このような手間のアルゴリズムを擬線形時間アルゴリズムと呼ぶことにしょう．擬線形時間アルゴリズムは高効率なアルゴリズムと言ってよいであろう．

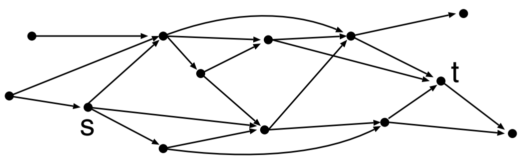

図 1:

３ 木の列挙

前述の問題の拡張として，頂点s，t_1，t_2，…，t_kが与えられたときsを根としt_1，t_2，…，t_kを葉とするような有向木を列挙することが考えられる．根とはそこからあらゆる頂点へ行けるような頂点のことであり，葉とはそこからはどこへも行けないような頂点のことである．ここではさらに頂点に以下に述べる相反制約がついた場合を考える．頂点集合の族C_1，C_2，…，C_j（それぞれを相反集合と呼ぶ）が与えられていて，各相反集合についてその中の頂

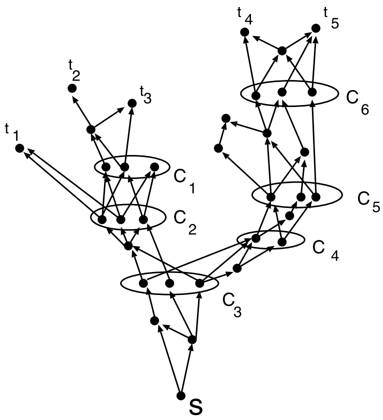

図 2:

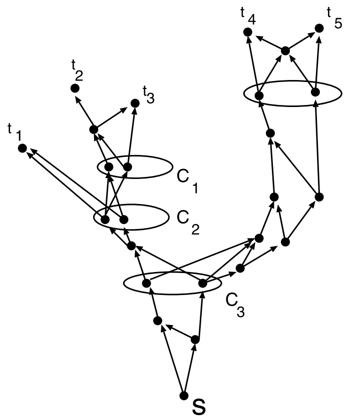

図 3:

点は一つしか使えない，という制約を課すというものである．以下では簡単のため各相反集合 C_i は，その頂点をすべて消去すると C_i のいずれかの頂点に到達可能な頂点と C_i のいずれかの頂点から到達可能な頂点とは（辺の向きを無視しても）連結でなくなるものとし，また，どの二つの相反集合も共通の頂点を含まないものとする．

この問題についても，無用な辺や頂点を消去し，列挙をガイドするグラフを作製することにより擬線形なアルゴグラフが作れる．以下，簡単に説明する．

C_1，C_2，…，C_j のそれぞれを一つの頂点と考え仮想頂点と呼び，また，s，t_1，t_2，…，t_k のそれぞれもただ一つの頂点のみを含む相反集合と考え，それぞれを仮想頂点と考える．仮想頂点間につぎのように有向辺 (仮想辺と呼ぶ) を導入する．すなわち，仮想頂点 u から仮想頂点 v への仮想辺を設けるのは u に対応する相反集合のある頂点から v に対応する相反集合のある頂点へのこれら以外の相反集合の頂点を経由しないような道が（元のグラフにおいて）存在するそのときに限る．このようにして辺を導入すると仮定より木ができる．これを仮想木と呼ぶ．

この仮想木において出る辺が高々一つしかないような仮想頂点に対応する相反集合は相反制約から削除する．ただし s，t_1，t_2，…，t_k のそれぞれを相反集合と解釈したものはそのまま残す．これを出来る限り実行してあるものとする．

頂点 u からある相反集合へ到達可能とは頂点 u からその相反集合中のある頂点への道が存在することと定義する．各相反集合 C_i には仮想木において子が二つ以上存在することになっている．C_i の頂点

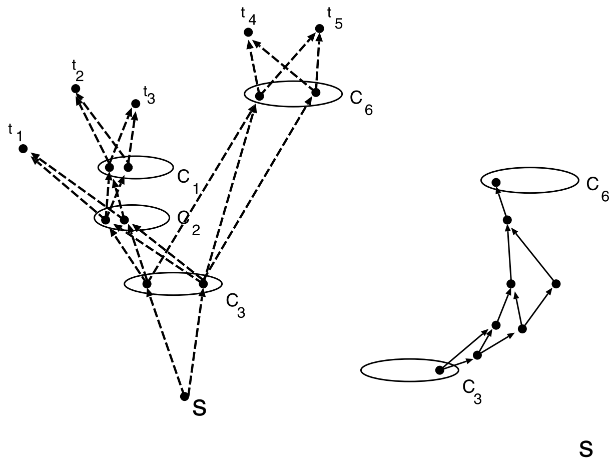

図 4:

のうち，子になっている相反集合すべてに到達可能なもののみを残し，そうでない頂点を C_i から消去する．

ガイドグラフは消去されずに残った相反集合の頂点を集めたものを頂点集合とし，それに属する２頂点間に元のグラフにおいて有向道があれば対応して有向辺（ガイド辺と呼ぶ）を設けてできる有向グラフである . ただし，同一の相反集合の頂点どおしの間には辺は設けない．最終的に列挙を行うときのために上記のガイド辺を設ける際に，対応する部分グラフ（有向道のうえに乗りうる辺と頂点よりなるグラフ）も作製しておく．例えば，図４の C_3 の右の頂点から C_6 の左の頂点へのガイド辺には右側に示したようなグラフが対応する．

以上の前処理ののち，ガイドグラフにおいて

s，t_1，t_2，…，t_kを含む木を列挙し，そのつど，木の各頂点ごとに極小連結部分グラフを列挙する．すなわち，木の頂点uその（木における）子がv_1，v_2，…，v_mとしたときu，v_1，v_2，…，v_mを含む（元のグラフでの）極小連結部分グラフを列挙する．これは相反制約に無関係にできるので容易である．前処理は全体として多項式時間であり，列挙段階では無駄が生じることはないので擬線形時間アルゴリズムが得られたことになる．