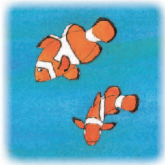


価格付け・ヘッジング・裁定



研究ノート

関根 順*

Pricing, Hedging and Arbitrage

Key Words : mathematical finance, derivative pricing, hedging, arbitrage

1 序

筆者の専門は数理ファイナンスと呼ばれるファイナンス（金融理論）に纏わる数学（主に確率論）の研究である。この分野は、1970年代初頭のBlack, Scholes, Mertonによる金融派生商品に関する価格付け理論の研究が大きな先駆けとなり、さらにこれにIT技術の圧倒的な発達加わり、結果として大量の理工系研究者・技術者が流入し、理論的にも技術的にも大きな発展を遂げるに至った。一方、2000年代末の世界的金融危機においては、米国の不動産バブル崩壊に伴った金融派生商品の価格暴落が大きな原因であったとされており、既存の標準的理論に基づいた手法の限界が露わになるとともに、現在ではその拡張や新展開の重要性が問われている。

さて本稿の目的は、最新の理論や技術の紹介ではなく、むしろ基本的な「金融リテラシー」の重要性の喚起である。一つの動機は、最近受けた相談（為替デリバティブに関連した被害訴訟）に端を発して、筆者がいくつか事象を調べて得た印象に拠っている。数理ファイナンスの扱う問題や課題を、その中で少しでも垣間見せることができれば幸いである。

2 派生証券：デリバティブ

派生証券（derivative securities）とは原始証券（primitive securities; 株式、債券、外国通貨などの

より基本的な金融商品を指す）から派生して産み出される金融商品の総称である。単にデリバティブ（derivatives）と呼ぶことも多い。典型的な例を二つ挙げる：

例1（ヨーロピアンコールオプション）。これは、原始証券を決まった満期日 T に決まった権利行使価格 K で購入できる権利のことである。購入者は、満期日 T に、原始証券価格 S_T が K 以上ならば権利を行使するだろうし、 K 以下ならば権利を放棄すればよい。すなわち

$$(1) \quad F := \max(S_T - K, 0)$$

が満期日に購入者が受け取る利益分ということになる¹。 F のことを（ヨーロピアンコールオプションの）ペイオフと呼ぶ。

例2（ヨーロピアンプットオプション）。これは、原始証券を決まった満期日 T に決まった価格 K で売却できる権利のことである。購入者は、満期日 T に、原始証券価格 S_T が K 以下ならば権利を行使するだろうし、 K 以上ならば権利を放棄すればよい。すなわち

$$(2) \quad F := \max(K - S_T, 0)$$

が満期日の購入者が受け取るペイオフということになる。

日常的な金融商品の中にも、このようなデリバティブを内包しているものが実は多い。一例を挙げる：



*Jun SEKINE

1964年7月生
東京大学 大学院理学研究科（1994年）
現在、大阪大学 大学院基礎工学研究科
教授 博士（理学） 数理ファイナンス
TEL : 06-6850-6461
FAX : 06-6850-6461
E-mail : sekine@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

¹ 購入者が満期に F 受け取ることを差金決済という

例3 (特約付外貨定期預金). A (\$) 預金する. 満期 T (年) 後の円/ドル為替レート S_T (¥/\$) が特約レート K より大きい (円安の) ときは, $A(1+R)^T$ (\$) を特約レートで円に交換され $A(1+R)^T K$ (¥) 普通預金口座に入金される. ここで, R はあらかじめ定められた預金利率である. 一方 $S_T < K$ の (円高の) ときは, この特約は消滅し, $A(1+R)^T$ (\$) 外貨預金口座に入金される. 満期 T に受け取れる金額を円ベースで表すと

$$\begin{aligned} (3) \quad F &= A(1+R)^T \min(S_T, K) \\ &= AK(1+R)^T \\ &\quad - A(1+R)^T \max(K - S_T, 0) \quad (\text{¥}) \end{aligned}$$

となる. すなわち, この商品を購入することは, AK (¥) 定期預金して, さらに円/ドル為替レートに関するヨーロピアンプットオプションを $A(1+R)^T$ (\$) 売っていることと等値ということになる.

図1-3はそれぞれ(1)-(3)式で表されるデリバティブの満期でのペイオフ F のグラフである (横軸を満期での原始証券価格 S_T にとり, $K=100$, 例3では $R=0.03$ と置いた). 図を見れば一目瞭然であるが, コールオプションやプットオプションを購入することで, 原始証券の価格上昇や下落に対して“保険”をかけることができる. 一方, 例3の特約付き外貨定期預金の購入は円・ドル通貨プットオプションの売却と等価であり, 円高時に生じる損失には際限が無い.

3 価格付け

例1-2に挙げたような金融商品を, 現時点 (時刻0) でいくらで価格で売るのが適正か? また, 例3の特約付外貨定期預金をいくらの手数料を受け取って販売するのが適正か? これらを論じるのがデリバティブの価格付け問題である. Black-Scholes-Merton は以下に述べるような「複製」と「無裁定」に基づく議論で, 理論的に適正な価格を決定した: 説明のため, いくつか用語や記法, 数式を導入する. 安全資産 (銀行預金など) の利子率過程を $(r_t)_{t \geq 0}$, 危険資産 (株式, 外国通貨など) の価格過程を $(S_t)_{t \geq 0}$ と記す. これら2資産を動的に組み合わせて連続的に運用すると, 総資産額を表す過程

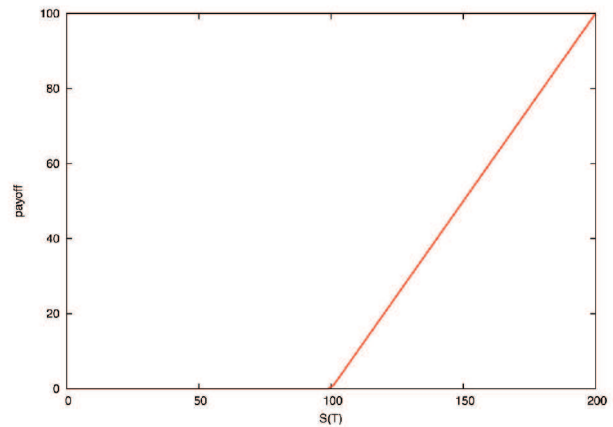


図1: コールオプションの満期での損益図

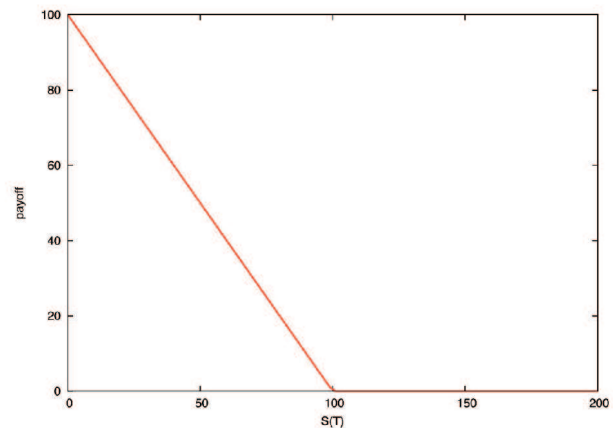


図2: プットオプションの満期での損益図

$X := (X_t)_{t \geq 0}$ は

$$(4) \quad dX_t = \xi_t dS_t + (X_t - \xi_t S_t) r_t dt, \quad X_0 = x$$

と確率微分方程式を用いて表される. ここで x は時刻0での初期資産額を表し, ξ_t は時刻 t での危険資産の保有量を表している. (4) 式は, 微小期間 $[t, t+dt]$ 内で

$$\bullet dX_t \approx X_{t+dt} - X_t: \text{総資産額の変動}$$

が, 右辺各項

$$\begin{aligned} \bullet \xi_t dS_t &\approx \xi_t (S_{t+dt} - S_t): \text{危険資産保有分の変動,} \\ \bullet (X_t - \xi_t S_t) r_t dt &: \text{安全運用部分の変動,} \end{aligned}$$

の和で表されていると解釈される. このような運用

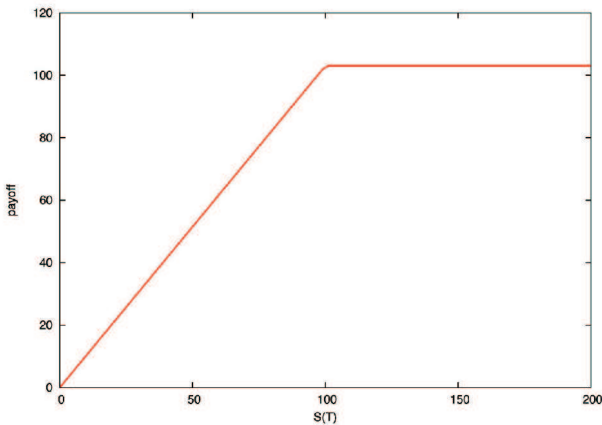


図3：特約付外貨定期預金の満期での損益図

を資金自己調達の（すなわち運用期間中に資金の追加流入や流出がない運用）と呼ぶ。

さて、デリバティブのペイオフ F に対して

$$(5) \quad dX_t = \xi_t dS_t + (X_t - \xi_t S_t) r_t dt, \quad X_T = F$$

を満たす資金自己調達の運用 $(X_t, \xi_t)_{0 \leq t \leq T}$ が求まったとき、すなわち、原始資産を動的に組み合わせてデリバティブのペイオフ F に一致するものが作り出されたとき、 F が複製されたと呼ぶ。実は、このときの F の複製に必要なコスト X_0 こそが、デリバティブの（時刻0での）理論的に適正な価格である。ただしここで、「適正な価格」とは裁定機会を許さない「無裁定価格」という意味であり、また、裁定機会とは、元手（初期コスト）0で運用を行って、確率1で損失を出さず、正の確率で利益を上げることができる状態のことである。

ところで、(5) 式のように終端条件を置いて解く確率微分方程式は、後退型確率微分方程式 (backward stochastic differential equation, BSDE と略記) と呼ばれ、(4) のような初期条件を置いたものとは区別する。これは、ランダムな項を含む確率微分方程式では時間と共に情報が増えていく（未来の情報は現時点では見えない）ので、方程式を前向きに解くのと後ろ向きに解くのとでは大きく事情が異なっているからである。実は、(5) 式のように (X, ξ) に関して線形な BSDE は、適当な条件下でその解をより具体的に表現できることが知られている。例えば、利子率は定数 r で表されており、危険資産価格は

$$(6) \quad dS_t = S_t \{ \mu(t, S_t) dt + \sigma(t, S_t) dW_t \}, \quad S_0 > 0$$

と適当な $\mu, \sigma: [0, T] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ と1次元 Brown 運動 $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ を用いて表されているとしてみよう。

(6) から

$$\mathbb{E}_t \frac{dS_t}{S_t} = \mu(t, S_t) dt, \quad \mathbb{V}_t \frac{dS_t}{S_t} = \sigma(t, S_t)^2 dt$$

($\mathbb{E}_t, \mathbb{V}_t$ はそれぞれ時刻 t での条件付期待値と分散を表す記法) が得られるので、 $\mu(t, S_t)$ は危険資産価格の期待収益率と呼ばれ、また、収益率の標準偏差を表す $\sigma(t, S_t)$ はボラティリティと呼ばれる。さらに、デリバティブのペイオフが

$$F := f(S_T)$$

と満期での危険資産価格 S_T の関数として表されているとしてみる。このときは、2階の線形偏微分方程式の終端値問題

$$(7) \quad \begin{aligned} 0 &= \left\{ \partial_t + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \partial_{xx} + (r - q)x \partial_x - r \right\} V \\ (0 \leq t < T), \\ V(T, x) &= f(x) \end{aligned}$$

の解 $V \in C^{1,2}([0, T] \times [0, \infty))$ を用いて

$$(8) \quad X_t = V(t, S_t), \quad \xi_t = \partial_x V(t, S_t)$$

と表される (q は配当率を表す)。

ここで、(7)-(8) 式は期待収益率の項 μ を含まない点に注意する。これは、(7) に Feynman-Kac の公式を用いて得られる V の期待値表現：

$$(9) \quad V(t, x) = \mathbb{E} \left[e^{-r(T-t)} f(\tilde{S}_T) \mid \tilde{S}_t = x \right],$$

ただし

$$(10) \quad d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \left\{ (r - q) dt + \sigma(t, \tilde{S}_t) dW_t \right\}$$

からもわかる。すなわち、デリバティブの無裁定価格は、危険資産価格 S の期待収益率 μ を安全運用金利から配当率を引いた $r - q$ に置き換えて

イオフ $f(\tilde{S}_T)$ に割引率 $e^{-r(T-t)}$ を乗じて期待値をとったものに等しい。(9)を用いたデリバティブの価格計算法を「リスク中立化法」などと呼んでいる。

さらに例えば、ボラティリティ σ が定数で $f(x) := \max(x - K, 0)$ (コールオプションのペイオフ) としてみる。すると、(7) や (9) は具体的に計算されて

$$(11) \quad V(t, x) = xe^{-q\tau} \Phi(d_1(\tau, x, \sigma)) - Ke^{-r\tau} \Phi(d_2(\tau, x, \sigma)),$$

ただし $\tau := T - t$,

$$\begin{aligned} \Phi(d) &:= \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \\ d_1(\tau, x, \sigma) &:= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left\{ \log\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau \right\}, \\ d_2(\tau, x, \sigma) &:= d_1(\tau, x, \sigma) - \sigma\sqrt{\tau}, \end{aligned}$$

が得られる。これが Black-Scholes のコールオプション価格公式として知られている式である。

4 ヘッジング

例 1-2 に挙げたようなオプションを発行 (売却) すると、発行者は満期日にペイオフ分を購入者に支払うことになる。ただし、図 1-2 に見たように、ペイオフは満期日の危険資産価格 S_T に依存した現時点では不確定な額になっている。今、発行者が BSDE(5) の解 $(X_t, \xi_t)_{0 \leq t \leq T}$ を用いて資金自己調達の運用を行うと、満期日で

$$-F + X_T \equiv 0$$

が (確率 1 で) 成り立つので、不確定な額の支払をカバーして損失を (確率 1 で) 0 にできる。このような、デリバティブの不確定なペイオフのリスクを相殺するような運用はヘッジング (hedging) と呼ばれる。そして (8) 式で $(X_t, \xi_t)_{0 \leq t \leq T}$ が与えられている場合は、価格を決める関数 $V(t, x)$ の原始資産価格に対する微分 (感応度) : $\partial_x V(t, x)$ を用いて時刻 t での原始資産の保有量が決まっている。これはデルタヘッジングと呼ばれ、実際のトレーデ

イングでも一般的に用いられるヘッジング手法である。

5 モデルの推定・決定

(5) の解 $(X_t, \xi_t)_{0 \leq t \leq T}$ を求めて無裁定価格やヘッジング戦略を (数値的に) 計算するためには、まずモデルを決定しないといけない。具体的には、例えば (6)-(10) で用いたモデルならば、直接観測できるわけではないボラティリティ $\sigma(t, S_t)$ の決定が必要になる。実際は、既に値のついているデリバティブの市場価格からボラティリティ関数 $\sigma(\cdot, \cdot)$ をインプライする手法が用いられている。つまり、(9) 式を用いて

$$「\text{デリバティブの市場価格}」 = e^{-rT} \mathbb{E} f(\tilde{S}_T)$$

と見做して、左辺の市場価格をインプットとしてアウトプットとして現在市場で予想されている将来の危険資産価格の分布やボラティリティ関数 $\sigma(\cdot, \cdot)$ を導出しようという手法であり、この作業はモデルのキャリブレーションと呼ばれている。例えば、理想化された状況として、任意の満期 T 、任意の行使価格 K のコールオプションの市場価格

$$(12) \quad \{C_{\text{mkt}}(T, K)\}_{T, K \geq 0}$$

が得られているとすると、これらをインプットとして

$$\begin{aligned} &\sigma(t, x)^2 \\ &= 2 \left(\frac{\partial_t C_{\text{mkt}} + (r - q)x \partial_x C_{\text{mkt}} + q C_{\text{mkt}}}{x^2 \partial_{xx} C_{\text{mkt}}} \right) (t, x) \end{aligned}$$

の形のボラティリティ関数が得られることが知られている (Dupire の公式と呼ばれている)。もちろん、現実には連続無現個の市場価格 (12) がインプットとして得られることはないので、何らかの補完作業を伴ったキャリブレーション手法が活用されている。例えば為替オプションの市場では

- (a) ATM (at the money) オプション : 行使レートが現時点での為替レートに等しいコール (あるいはプット) オプション

や,

(b) OTM (out of the money) コールオプション:
行使レートが現時点での為替レートより大きい
コールオプション,

(c) OTM (out of the money) プットオプション:
行使レートが現時点での為替レートより小さい
プットオプション,

を組み合わせた, リスクリバーサル取引: (b) - (c),
マーケットストラングル取引: (b) + (c) が値付けさ
れており, これを用いて“市場が予想する”将来の
価格の分布 (分散, 歪度, 尖度の度合い) が推測で
きるようになっている (詳しくは, 例えば Clark
(2011) 参照)。

6 例: 為替予約

例3で挙げた特約付外貨定期預金がプットオプションの売却を内包していることは既に述べた。本節では, 同じく為替オプションを内包した金融商品を実例を基にして紹介し, 更にその適正な価値 (価格) を見積もってみることにする。

例4 平成20年, 米ドル/日本円間の為替レート105 (¥/\$) の時期に, 企業Aは銀行Bと以下の為替予約契約を手数料0 (ゼロコスト) で交わした:

契約日の1年後からの毎月末に計24回, 企業Aが97 (¥/\$) の為替レート適用で C (\$) 購入できる権利を持つ。一方で, 銀行Bに107 (¥/\$) の為替レート適用で $2 \times C$ (\$) 売却できる権利を与える。ただし後者の権利は97 (¥/\$) より円安の場合は消滅するものとする。

例4は, 毎月末が満期日の, 権利行使価格が97 (¥/\$) の米ドルコールオプションの購入 (計24種類) と, 権利行使価格が107 (¥/\$) の (権利消滅の条項が付いた) 米ドルプットオプションの売却 (計24種類) を組み合わせた商品に他ならない。毎月末の受け渡し日でのペイオフは図4で与えられる。このように, オプションの購入と売却を組み合わせ (そ

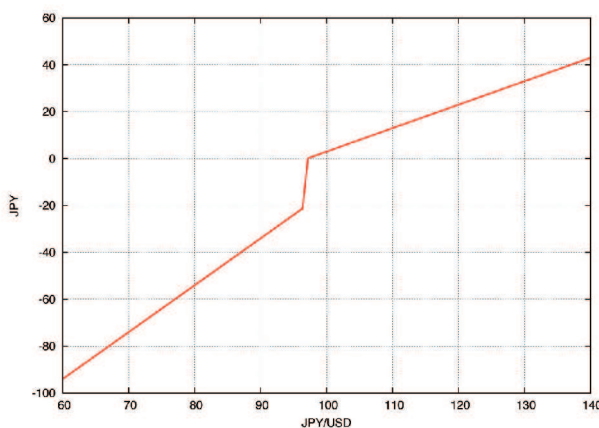


図4: コール・プットオプションの合成による損益図

れぞれのオプション料を相殺させて) ゼロコストとして契約することはよくあるようだが, 以下の特徴は明らかである。

- 企業A, 銀行B双方が利益・損失を被る可能性がある (Aには円安時に利益が生じ, 円高時に損失が生じる)。
- 円安時に比べ, 97 (¥/\$) 以下の円高時は2倍の振れ幅で企業Aの損失 (= 銀行Bの利益) が増大する (これをレバレッジ効果と呼ぶ)。

さて, 次にこの商品の適正価格 V_0 を見積もってみる (一見して適正価格ゼロ, $V_0 = 0$, とはあまり思えないので)。前節で述べたように, 無裁定価格の計算には, モデルやそのパラメータ値の決定が必要であり, それらは契約日における市場の状況 (金利値やデリバティブの市場価格) から決定されていたはずのものである。今回は, 具体的には以下を採用して試算を行った。

- 1 year = 250 days, 1 month = 20 days (営業日ベース) で計算,
- $r_d = 0.005$: 円安全運用金利, $r_f = 0.03$: 米ドル安全運用金利を採用,
- リスクリバーサル (RR) やマーケットストラングル (MS) に関する過去データは入手できなかった。代わりに, 想定され得る複数のRR, MS

の値からインプライドボラティリティカーブを補完して描き、オプション無裁定価格を計算した（図5にイメージを示した。これは為替レート S_T の様々な分布を想定して無裁定価格を試算していることに当たっている）。これより V_0 の下限・上限を見積もった。

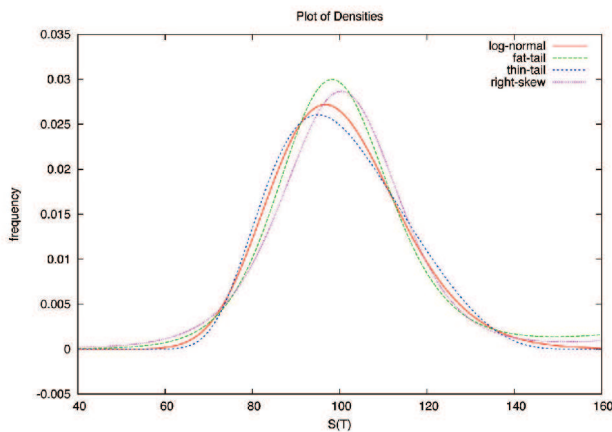


図5： S_T の分布密度関数の例

結果，ゼロコストとは言い難い値：最少で $V_0 = -550.5 \times C$ (¥)，最大で $V_0 = -163.5 \times C$ (¥) が得られた。よって，無裁定価格理論の当然の帰結として，この為替予約の売却者（銀行 B）に裁定機会が生じることになる。もし例えば，B がポジションの解消（米ドルコールオプションの購入と米ドルプットオプションの売却）をインターバンク市場で行えば，即座に B に V_0 分の利益が確定する。また例えば，B が米ドルコールオプションのポジションの解消だけ行っておけば，プットオプションの買いポジションだけが残る，円高状況（為替レート 97 ¥/\$ 以下の状況）の際は，ペイオフ分の利益がさらに得られることになるわけである。

参考文献

- [1] Clark, I. Foreign Exchange Option Pricing: A Practitioners Guide. *The Wiley Finance Series*, 2011.

