

パンルヴェ方程式の大域解析



研究ノート

大 山 陽 介*

Global asymptotics on the Painlevé equations

Key Words : The Painlevé equation, global analysis,
monodromy problem, special functions

1. はじめに

微分方程式の研究は、ニュートン・ライプニッツが微積分を発見した当初より始まっている。主に力学の問題を解くために、さまざまな形の微分方程式の解法が調べられていった。しかし、微分方程式の求積法は19世紀には行き詰まりを見せる。19世紀末に天体力学の三体問題が難問として立ち上がり、最終的に「三体問題は求積できない」という否定的な結果にたどりついてしまう。この後、三体問題の解決に大きく寄与した二人の研究者、ポアンカレとパンルヴェは異なる道を進んでいくことになる。ポアンカレは微分方程式の求積を離れて位相力学系へと進んでいく。最近ペリマンによって解かれたポアンカレ予想の提案など、ポアンカレは位相幾何学の基礎付けを行って新分野を開拓していった。他方、パンルヴェは既知の函数では解くことのできない新しい方程式を見出す方向へと進んでいく。求積できるということは、既知の函数の組合せで解を表示できるということであり、むしろ新しい数学は出てこない。逆に求積できない方程式は「解けない」のではなく新しい函数を定めていると考えれば、はるかに建設的であり数学の幅を広げるものになっている。

パンルヴェは19世紀末から20世紀初めにかけて、二階の非線型常微分方程式の中で「動く分岐点を持

たない」という性質をもつ方程式を分類し、その中から求積できないものを取り除くことで6種類の方程式を得た。求積できない方程式を勝手に考えても統制できないので、解が途中で分岐しないものに限定的ことでむしろ普遍性を高めている。ちなみに、パンルヴェは三体問題においても三つの天体が同時衝突するときには解が衝突時間 t_0 の周りで三乗根の形 $(t - t_0)^{1/3}$ に分岐することを発見している。

パンルヴェの方程式は大変複雑なので、最初の3つだけ書くと、次の3つがそれぞれ、第1、第2、第3パンルヴェ方程式と呼ばれるものである [1] :

$$1) y'' = 6y^2 + x$$

$$2) y'' = 2y^3 + xy + a \quad (a \text{ は定数})$$

$$3) y'' = \frac{1}{y}(y')^2 - \frac{y}{x} + \frac{ay^2+b}{x} + cy^3 + \frac{d}{y}$$

(a, b, c, d は定数)

パンルヴェは、自分が発見したこれらの方程式が新世紀の数学の重要な研究対象になっていくと信じていたであろう。しかしながら、パンルヴェはこの方程式を発見した直後の1905年、政界に身を転じ国会議員となる。そして、1917年と1925年の二度、短命ではあったがフランスの首相をつとめるに至る。こうしたこともあって、パンルヴェの方程式はしだいに忘れ去られていくのである。ポアンカレはパンルヴェの研究を評して「数学は全体として一つの大陸をなしている、一つ一つの分野は国であり相互に関連し合っている。しかし、パンルヴェの研究は素晴らしいが絶海の孤島である」と述べている。ちなみに、1908年にフランスに招待されたライト兄弟の兄・ウィルバーが操縦する飛行機にパンルヴェは同乗して70分間80キロほど空を飛んでいる。「世界で初めて空を飛んだ数学者」でもある。

1970年代に入ってイジング模型など数理物理学



*Yousuke OHYAMA

1962年8月生

京都大学理学研究科数理解析専攻修了
(1990年)現在、大阪大学 大学院情報科学研究科
情報基礎数学専攻 准教授 博士(理学)
古典解析学

TEL : 06-6850-5311, 5326 (事務)

FAX : 06-6850-5327

E-mail : ohyama@ist.osaka-u.ac.jp

の新たな発展にともない、パンルヴェ方程式が再び脚光を浴びていく。従来、ベッセル函数などの線型方程式をみたす特殊函数を用いるだけで十分に問題が解けていたのが、数理科学の進展とともに「非線型の特特殊函数」が必要不可欠になってきたのである。その意味では、ようやく時代がパンルヴェに追いついたともいえる。この時、パンルヴェ方程式の研究の小さな芽が西欧の主流の数学と遠く離れた「絶海の孤島」日本にあった。パンルヴェ自身の講義録が読まれ、フランス人ですら忘れていた半世紀以上も前の数学が研究されていたのである。時代の流れから取り残された「絶海の孤島」日本が1980年以降はしだいにパンルヴェ研究の主役をつとめていき、主に純粋な数学的興味から基礎理論が急速に整備された。他方で、量子場の理論やソリトン方程式、微分幾何や確率論といったさまざまな分野に応用されるにつれ、こうした応用からの要請に呼応して研究が深まっているのが現状である。

2. モノドロミ保存変形

微分方程式を求積できない場合、解の性質を調べることが主目的になる。一つには解が無限遠方でのような振る舞いをするのかその漸近解析を行い、どういう初期条件の下で解が安定するのか接続問題を解いていくことが問題になっていく。

線型方程式の場合ですらも、漸近解析・接続問題は決して容易ではない。古典的な特殊函数のテキストには、ベッセル函数や超幾何函数について膨大な公式が連ねてあるが、こうした古典的な函数を離れた途端に知られた結果が乏しいのが実態である。たとえば、2階の線型方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = V(x, t)y \quad (A)$$

を考える。 $V(x, t)$ は適当な函数で t はパラメタである。 $x \rightarrow -\infty$ の近くでの解を (u_1, u_2) 、 $x \rightarrow +\infty$ の近くでの解を (v_1, v_2) とすると、これらの解の間には接続関係

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

が存在する。ここで、接続係数 $C_{ij}=C_{ij}(t)$ は t のみ

に依存する函数であり、 x にはよらない。この接続係数を決定するのが微分方程式の大域問題であり、量子力学などさまざまな数理科学で表れる重要な問題であるが、ベッセル函数など既知の特特殊函数以外の場合には接続問題を厳密に解くのは難しい。

そこで、考え出されたのが「モノドロミ保存変形」である[2]。上の定式化であえてパラメタ t を入れたが、 t が変わっても接続係数が変わらないという条件を課すと、 t に関する新しい微分方程式

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A(x, t) \frac{\partial y}{\partial x} + B(x, t)y \quad (B)$$

を得る。こうした線型微分方程式の微小変形を(1)のモノドロミ保存変形という。(A)と(B)の両立条件を考えるとパンルヴェ方程式を得る(計算は容易ではない)。こうして、数理科学の基本的な問題である接続問題が、絶海の孤島と思われたパンルヴェ方程式と繋がったのである。元の(A)において、モノドロミを保存しながら t の値を動かして、(A)の接続係数が求まる別の線型方程式に変形できることがある[3][4]。この変形の追跡は一般には容易ではなく、非線型で求積はできないパンルヴェ方程式の解の性質、特に局所的な漸近解析を調べる必要がある。一般には線型問題のほうが非線型問題より易しいと思われるが、実は、モノドロミ保存変形の考え方はむしろ「線型方程式の大域問題を解くために、非線型方程式であるパンルヴェ方程式の局所問題を考える」というものである。

3. パンルヴェ方程式の大域解析

次にもう一步先に進めて、パンルヴェ方程式の大域問題を考える。実は、非線型の接続問題というのは問題の設定からして困難である。前節で述べたように、線型方程式の接続問題は要するに行列の成分を求めなさいという線型代数の問題であるが、非線型方程式の解空間は曲がった複雑な構造を持っており、解空間から別の解空間への写像を調べなければならぬ。しかしながら、線型の場合同様に非線型の接続問題も数理科学において重要な問題である。従来は、問題解決の糸口すらつかめない問題であった。

具体的に、パンルヴェ函数がどのような振る舞い

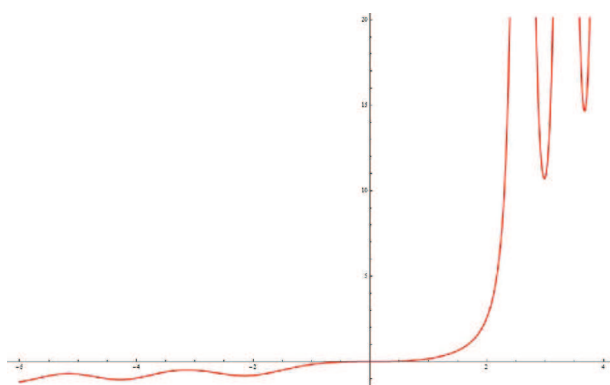


図1

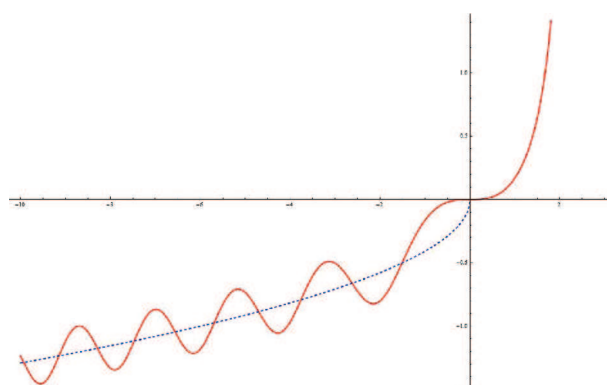


図2

をするのか簡単な例で見てみよう。第1パンルヴェ方程式 $y'' = 6y^2 + x$ を、 $y(0)=0, y'(0)=0$ という初期値で数値的に解いてみると、図1、2のようなグラフを得る。図1は $-4 < x < 4$ を、図2では $-10 < x < 2$ のグラフで縦軸のスケールは変えている。 $x \rightarrow -\infty$ における解は、青い点線のグラフ $y = \sqrt{-x/6}$ に漸近しつつ振動しており、 $x \rightarrow +\infty$ では途中で解が爆発して無限遠に飛んでしまう点（極）が無数にある。パンルヴェ方程式は分岐点を持たないため、爆発してもさらに先に自然に解析的に伸ばすことができる。一見きわめて特殊な例を扱ったように思えるが、実はこの $x \rightarrow \pm\infty$ での異なる振る舞いは、パンルヴェ函数のほぼ全てに共通する現象であり、

- 1) $x \rightarrow -\infty$ の時のようにゆるやかな代数的増大度をもちつつ、その周囲で振動する（あるいは指数函数的に増減する）
 - 2) $x \rightarrow +\infty$ の時のように無数に極を持つ
- という2種類の全く異なる漸近挙動を得るのである。線型方程式の漸近展開は $x \rightarrow +\infty$ のときであれば

$$y(x) \sim e^{kx} x^b \sum_{j=0}^s (\log x)^j \sum_{n=1}^{\infty} a_{j,n} x^{-n}$$

のように、指数函数や対数函数、冪函数で表示される。ここで k が虚数であれば三角函数的に振動することになる。結局、漸近解析というのは「わからない函数を初等的な函数で近似してわかった気になる」ものである。非線型方程式の場合でも、やや複雑になるが似たような展開を持つことが知られているが、こうした冪展開だけでは先ほどの第1パンルヴェ函数の $x \rightarrow +\infty$ のように極を無数に持つ場合を理解

することは困難である。

第1パンルヴェ方程式はブートルー変換と呼ばれる変数変換 $y = \sqrt{x} v, t = \frac{4}{5} x^{5/4}$ によって

$$v'' = 6v^2 + 1 + \frac{4v}{25x^2} - \frac{v'}{x}$$

に変換される [5]。 $x \rightarrow +\infty$ のときには後ろ2項を微小量と思えば $v'' = 6v^2 + 1$ で近似されるが、これは楕円函数によって求積できる。ブートルーは1913年にこの変換を用いて、第1パンルヴェ方程式の解が楕円函数によって近似できることを示し、実際に $x \rightarrow +\infty$ で極を無数に持つ現象を説明した。すなわち、非線型方程式の漸近挙動を見るには、近似として楕円函数が本質的に必須になる。なお、彼の議論は現代的にみるとギャップの多いものであったので、現在では精密化した解析がなされている。

4. 現在の研究

パンルヴェ方程式の大域解析については、100年前の古典から現代に至るまで長い間の蓄積がある。しかしながら、ほとんどが個別に散発的にアタックされたものであり、研究が錯綜している。私は現在、これらの研究を統一的な視点からまとめようとしており、上で述べた第1パンルヴェ方程式で $x \rightarrow -\infty$ の時のような代数的増大度を持つような場合に関しては、全てのパンルヴェ方程式をほぼ統一的に見ることができるようになった。

非線型方程式の漸近解をややラフに述べると $y(x) \sim F(x, C_1 x^a e^{px}, C_2 x^b e^{qx}) \quad x \rightarrow \infty$ という形で表される。ここで、 C_1, C_2 は積分定数

であり、 F は3変数の発散級数である。線型の場合と異なり、指数函数の冪 e^{px} , e^{2px} , e^{3px} , ... が解の中に表れ、収束性を示すのがとても難しい級数になる。しかし、たとえば p, q がともに負であれば $x > 0$ で収束することを示すのはさほど難しくない。残念ながらパンルヴェ方程式では p と q の符号が逆になるため、収束を示すのが厳しくなる。この困難は複素領域を考えることである程度は緩和される。典型的なケースである $p=1$ と $q=-1$ の場合には確かに実軸上では収束しないが、虚軸の上できわめて狭い収束域をもつ（角領域としてみたとき、角度は0になる）。

この解析は非常に繊細であるが、「絶海の孤島」日本では、福原満州男らによってこの種の非線型漸近解析が深く研究されてきた歴史があり、福原理論を精密化することで乗り越えることができる。虚軸からわずかに離れたところには無数の極を持っていることが、少なくとも数値実験によって示される。ちなみに、複素平面上にパンルヴェ方程式の解のグ

ラフを視覚することは決して容易ではない。近年は計算機能力向上だけではなく理論的にも連分数展開の方法などを用いて急速に視覚化の技術が進んでいる。図3は第1パンルヴェ方程式の特殊解の一つのグラフであり、極が無数にある様子が描かれている。

しかし、今なお楕円型漸近解析は未完成である。この部分が一番パンルヴェ方程式らしい解析であるので、今後数年かけて完成させたいと考えている。

参考文献

- [1] 岡本和夫「パンルヴェ方程式」岩波書店 (2009)
- [2] L. Schlesinger, J. für Math., **141** (1912), 96-145.
- [3] K. Kaneko, Kazuo, Y. Ohyama, Funkcial. Ekvac. **50** (2007), 187-212.
- [4] Y. Ohyama, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B13** (2009), 45-52.
- [5] P. Boutroux, Ann. Sci. École Norm. Sup., (3) **30** (1913), 255-375; **31** (1914), 99-159.

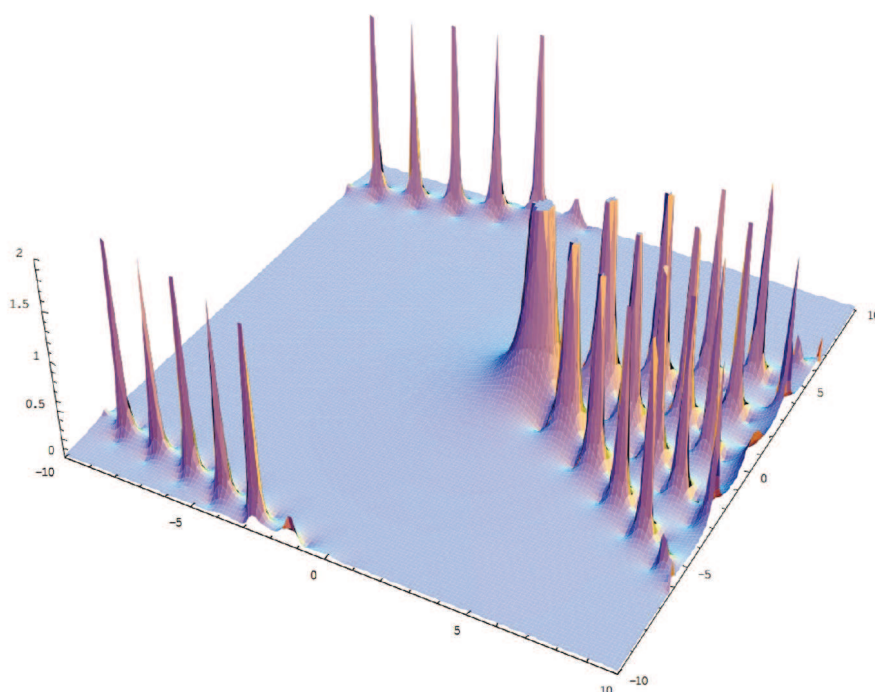


図3 (V. Novokshenov 氏のご厚意による)