生産と技術　第70巻　第2号（2018）

ランダム性の消し方：確率近似法とその停止則

研究ノート

和　田　孝　之*

Stochastic Approximation and Its Stopping Rules

Key Words：Stochastic Approximation, Adaptive Control, Stopping Rule

はじめに

確率近似法 [1] とは，確率的雑音が含まれる残差の情報から未知方程式の解を，逐次的に求めるアルゴリズムである．回帰分析や動的システムモデルのパラメータを入出力データから推定するシステム同定，システムの状態を推定する際の基礎となるアルゴリズムであり，解へと概収束の意味で収束する強い性質をもつことが知られている．その提案以来，様々な研究が進められており，そのアイデアは近年マルチエージェント系の制御へも展開されるなど，いまなお研究が進められている．

確率近似法は反復解法であり，無限に反復すれば解が得られることが分かっている．しかし，実際に無限に反復を行うことはできない．そのため，有限回の反復でアルゴリズムを停止させる必要があるが，その際，どのような基準を満たせば，所望の解が得られていると判断し，アルゴリズムを停止させてもよいだろうか．

本稿では，確率近似法のアルゴリズムと，この確率近似法に対し，筆者らが研究してきた停止則 [2-3] を紹介する．この停止則は，反復回数と，解候補が真の解にどれだけ近くなるかの関係をアルゴリズムの実行前に陽に与える．これを用いて，アルゴリズムの反復回数をどう設定すればよいかの指針を与えることができるだけでなく，収束の早さについて一つの評価を与えているとみることができる．本稿で紹介する結果は筆者らの一連の研究の中で最も設定が簡単な文献 [2] の内容を元にしている．

最後に，筆者の研究の方向について説明させていただきたい．筆者は制御系の解析・設計においてランダム性をキーワードとして研究を進めてきた．その研究は大きく二つに分けられる．一つは本稿で紹介する，雑音を悪者として扱い，その影響を可能な限り少なくする方向である．もう一つは，ランダム性の活かし方である．ランダム性のない問題に対して，あえてランダム性を付加することで効率的に解を得るアルゴリズムを研究している [4]．

ランダム性の消し方：確率近似法

確率近似法とは，確率的雑音が含まれる残差の情報から未知方程式の解を逐次的に得るアルゴリズムである．対象としている問題は，以下の方程式

$$f(x) = 0$$

を満足する x を求める問題である．ただし，問題の解き手は関数 $f(x)$ の情報を知らない．その代わり，x を与えると関数値 $f(x)$ を

$$y = f(x) + w$$

に従い観測できるとする．ただし，w は雑音で，センサなどの観測ノイズであり，平均0で分散 σ^2 の各時刻独立で同分布に従う確率変数である．これは，回帰分析などをデータからオンライン推定する場合や，動的システムの状態を推定する際などに表れる．

ここで確率近似法のアルゴリズムを紹介する．その前に，$f(x) = x$ が0となるxを求める問題を考えよう．関数形を知っていれば，$x = 0$ が解であることは直ちにわかるが，いま，我々は関数形についての情報を知らないとする．そのもとで，観測が雑音を含まない場合と含む場合，

* Takayuki WADA
1981年3月生まれ
神戸大学大学院　自然科学研究科　機械・システム科学専攻修了（2009年）
現在、大阪大学大学院　情報科学研究科　情報数理学専攻　准教授　博士（工学）
TEL：06-6879-7877
FAX：06-6879-7871
E-mail：t-wada@ist.osaka-u.ac.jp

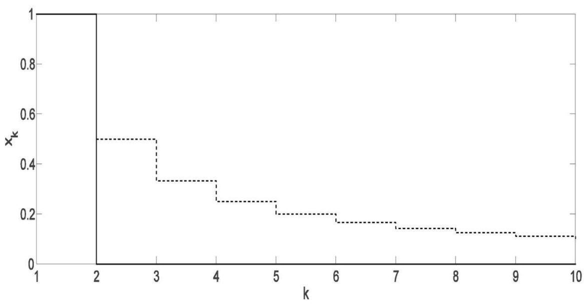

図１　雑音がない場合

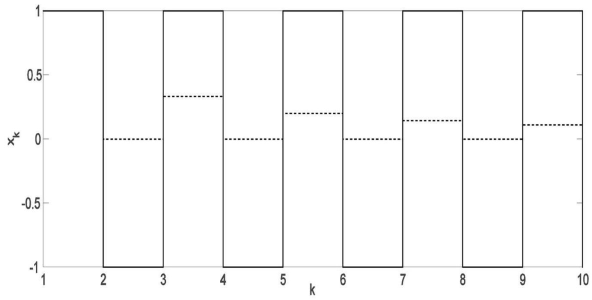

図２　雑音がある場合

$$y = f(x)$$
$$y = f(x) + w$$
に以下の二種類の更新則
$$x_{k+1} = x_k - y_k$$
$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{k+1} y_k$$
を用いて，方程式の根を探す．ただし，k はアルゴリズムの反復回数を表す．初期値は $x_1 = 1$ とする．

はじめは，雑音がない場合について考えてみよう．計算結果を図１に示す．実線が y をそのままフィードバックした場合，点線は反復回数が増えるたびに y の影響度を減少させた場合である．ただちにわかるように，そのままフィードバックすると，解が一度の反復で求まるが，影響度を減少させると，解へと収束するが，有限回の反復で解は得られない．

では，前者の更新則を用いる方が良いのだろうか．それを調べるため，次に雑音が存在する場合に二つの更新則から求まる解候補の振る舞いを調べてみよう．特徴を明らかにするため，雑音系列を
$$w_1 = w_3 = w_5 = w_7 = \cdots = 1$$
$$w_2 = w_4 = w_6 = w_8 = \cdots = -1$$
と定めておく．この設定のもと，アルゴリズムを実行すると図２のような挙動が得られた．今回は，そのままフィードバックした場合は，雑音の影響により，±１を交互にとる振動する挙動を示し，ランダム性の影響を消すことができない．それに対して，後者の更新則は雑音があったとしても次第に解へと近づいていく．

ここから分かることは，データに雑音が含まれている場合，データをそのままフィードバックすると，ランダム性の影響を受け続けることである．確率近似法は，
$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{k} y_k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$
により雑音の影響を消しつつ，解を得る．ポイントは
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} < \infty$$
を満足することである．前者はアルゴリズムが解を探索する距離に対応し，どこまでも解を探索可能であることを意味する．後者は加えられる雑音の分散の総和に対応しており，解候補に印加される雑音の分散が有限であることを意味する．また，上記の式を満足するようなゲインであれば別のものを用いてもよい．

確率近似法の停止則

確率近似法の停止則を紹介しよう．仮定として，関数 f は未知であるが，微分可能であるとし，その微分係数は
$$\frac{1}{2} \leq \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \leq 1$$
を満たすとする．ここで仮定したことは，微分係数が常に正の値をとり，その下界と上界が存在することである．

小さなパラメータ $\alpha > 0$，$\beta > 0$ をもとに，
$$\bar{k} \geq \max\{\tau_1, \tau_2\}$$
$$\tau_1 = \frac{1}{\alpha}, \qquad \tau_2 = \left(\frac{2\sigma^2}{\beta}\right)^2$$
と選ぶと，第 $\bar{k}$ 反復における解の候補 $x_{\bar{k}}$ は
$$\mathbb{E}[|x_{\bar{k}} - x^*|^2] \leq \alpha(x_1 - x^*)^2 + \beta$$
を満足する．記号 $\mathbb{E}$ は期待値を表す．

パラメータ α により初期候補の誤差が反復によりどれだけ小さくなるかを指定し，β は雑音の影響の大きさを指定する．これら二つのパラメータにより，解の精度を指定すると，直ちに必要な反復回数が分かることがこの停止則の特徴である．これまでにも

いくつか停止則の研究があったが，それらはアルゴリズム実行中に解候補のデータを見て適応的に停止するかを判断するものであった．我々の開発した停止則は，アルゴリズムを実行する前に反復回数を見積もることができる点に特徴がある．例えば，$\sigma^2 \leqq 1$ と見積もったとき，$\alpha = \beta = 0.1$ と選ぶと，$\tau_1 = 10$，$\tau_2 = 200$ が得られ，反復回数を 200 と設定すれば十分であることがわかる．

上の停止則は，x が一次元であれば簡単に導出できるのでその略証を紹介する．誤差 $e_k = x_k - x^*$ とおくと，その漸化式は

$$\mathrm{e}_{k+1} = e_k - \frac{1}{k}(f(x_k) + w_k)$$

である．平均値の定理より，

$$f(x_k) - f(x^*) = (x_k - x^*)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c), \qquad c \in (x_k, x^*)$$

を利用すると，

$$\mathrm{e}_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c_k)\right)\mathrm{e}_k - \frac{1}{k}w_k)$$

が得られる．これを元に，誤差の分散の漸化式が

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[(x_k - x^*)^2] = \mathbb{E}[e_k^2] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\left(1 - \frac{1}{k-1}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(\mathrm{c_k})\right)^2 e_{k-1}^2\right] + \frac{\sigma^2}{(k-1)^2} \end{aligned}$$

と得られるので，この漸化式を解き，

$$\mathbb{E}[(x_k - x^*)^2] \leq \frac{1}{k}(x_k - x^*)^2 + \frac{2\sigma^2}{k}$$

から，

$$\frac{1}{\tau_1} = \alpha, \quad \frac{2\sigma^2}{\tau_2} = \beta$$

より停止則を構成できる．

最適化への応用

確率近似法を応用すると，未知の目的関数

$$\min_x f(x)$$

を最小化することも可能である．目的関数の関数形がわからないため，勾配を推定する必要があるが，

$$\tilde{g}_k = \frac{f(x_k + c_k) - f(x_k + c_k)}{2c_k}$$

と推定する．つまり，差分により勾配の情報を推定している．確率近似法と勾配の推定値を

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{k}\tilde{g}_k$$

と組み合わせると，（局所）最適解が得られる．この場合も，停止則を構成可能である [5]．自動車のエンジンの燃費など，設計者がチューニングしているため，目的関数の形は未知でも凸性などを好ましい性質を持つ場合が多く，そのような対象に有効である．

おわりに

本稿では，確率近似法とその停止則について紹介した．本稿では触れられなかったが，マルチエージェント制御にも応用することができる．各エージェントがもつ情報のトレンドを残しつつ，局所的な情報交換を通して一致させる合意制御の文脈で，通信雑音の存在下で合意を達成するアルゴリズムと合意を達成するまでに必要な通信回数について，評価を与えている [6]．また，不確かさをもつ協力ゲームのコア探索アルゴリズムに確率近似法を応用し，停止則も構成している [7]．

謝辞

本稿で紹介した研究の一部は科学研究費補助金 15K18088， 24760344， ならびに， JST/CREST JPMJCR15K2 の支援を受けた．記して謝意を表す．

参考文献

1) Herbert Robbins and Sutton Monro: A Stochastic Approximation Method. The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 22, No. 3, pp.400-407 (1951)
2) Takayuki Wada and Yasumasa Fujisaki: Expected Squared Estimation Error of Stochastic Approximation in Finite Samples, Proceedings of the 42nd ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications, pp.283-286 (2011)
3) Takayuki Wada and Yasumasa Fujisaki: Stopping Rules of Stochastic Approximation, Automatica, Vol.60, pp.1-6 (2015)
4) 和田孝之， 藤崎泰正：ランダマイズドアルゴリズムによる制御系解析・設計， システム／制御／情報，Vol.55, No.5, pp.181-188 (2011)
5) Takayuki Wada and Yasumasa Fujisaki: Stopping Rules for Optimization Based on

Stochastic Approximation, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.169, No.2, pp.568-586 (2016)
6) Ryosuke Morita, Takayuki Wada, Izumi Masubuchi, Toru Asai, and Yasumasa Fujisaki: Multi-Agent Consensus with Noisy Communication: Stopping Rules Based on Network Graphs, IEEE Transactions on Control of Network Systems, Vol.3, No.4, pp.358-365 (2016)
7) Takayuki Wada and Yasumasa Fujisaki: A Stochastic Approximation for Finding an Element of the Core of Uncertain Cooperative Games, Proceedings of the 11st Asian Control Conference, pp. 2071-2076 (2017)